

Conectividad

Martín D. Safe

Instituto de Cálculo, Universidad de Buenos Aires

Tópicos Fundamentales en Teoría de Grafos
2.º semestre 2018

Conectividad

En esta unidad, asumimos que los grafos **no tienen bucles**.

Conectividad

La **conectividad** de un grafo G , denotada $\kappa(G)$, es el tamaño mínimo de un conjunto S de vértices tales que $G - S$ es desconexo o tiene solo un vértice.

Un grafo G es **k-conexo** si su conectividad es al menos k .

Un **conjunto separador** o **corte por vértices** de un grafo G es un conjunto S tal que $G - S$ es desconexo.

Observaciones

- ▶ Como un grafo completo no tiene un conjunto separador entonces $\kappa(K_n) = n - 1$.
- ▶ Si G es un grafo no completo entonces $\kappa(G)$ es el tamaño mínimo de un conjunto separador y $\kappa(G) \leq |V(G)| - 2$.
- ▶ Si consideramos $K_{m,n}$ con bipartición $\{X, Y\}$ y donde $m, n \geq 1$ entonces todo conjunto separador contiene a X o a Y . Como X e Y son separadores, $\kappa(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$.

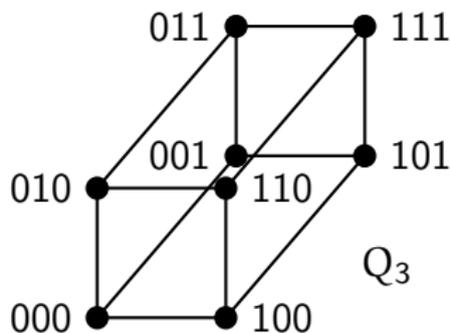
Conectividad

- ▶ Un grafo tiene conectividad 0 si y sólo si: ① es K_1 ; o ② es desconexo.
- ▶ Un grafo tiene conectividad 1 si y sólo si: ① es K_2 ; o ② es conexo y tiene un vértice de corte.
- ▶ Un grafo tiene conectividad 2 si y sólo si: ① es K_3 ; o ② es conexo, no tiene vértices de corte y tiene un conjunto separador formado por dos vértices.
- ▶ Como la remoción de los vecinos de un vértice dejan un grafo desconexo o un grafo con un único vértice entonces $\kappa(G) \leq \delta(G)$.
- ▶ Esta desigualdad no es ajustada en general. Por ejemplo, si $G = 2K_m$ entonces $\kappa(G) = 0$ y $\delta(G) = m - 1$.

Conectividad de los hipercubos

Hipercubo

El **cuadro k -dimensional** o **hipercubo Q_k** es el grafo simple cuyas aristas son las k -tuplas con entradas 0 y 1 y cuyas aristas son los pares de k -tuplas que difieren en exactamente una posición.



Vamos a probar que los hipercubos satisfacen $\kappa(Q_k) = \delta(Q_k)$.

Conectividad de los hipercubos

Lema

Para todo $k \geq 0$, $\kappa(Q_k) = k$.

Demostración.

Como $\kappa(Q_k) \leq \delta(Q_k) = k$, alcanzará con probar que todo conjunto separador tiene al menos k vértices. Lo probaremos por inducción.

Si $k \in \{0, 1\}$ entonces Q_k es un grafo completo con $k + 1$ vértices y , por lo tanto, $\kappa(Q_k) = k$.

Sea $k \geq 2$ y supongamos que $\kappa(Q_{k-1}) = k - 1$. Consideramos Q_k como dos copias Q y Q' de Q_{k-1} más un matching que une el vértice correspondiente de Q_k en Q y Q' . (...)

Conectividad de los hipercubos

Demostración (cont.)

Sea S un conjunto separador de Q_k .

Si $Q - S$ y $Q' - S$ son conexos entonces, como $Q_k - S$ es desconexo, S debe contener al menos un extremo de cada arista del matching; pero esto implica que $|S| \geq 2^{k-1} \geq k$ (ya que $k \geq 2$), como queremos probar.

Por lo tanto, por simetría podemos suponer que $Q - S$ es desconexo. Luego, por hipótesis inductiva, $|V(Q) \cap S| \geq k - 1$. Si S no tuviera vértices en Q' entonces, como todos los vértices de $Q - S$ tienen vecinos en Q' , $Q_k - S$ sería conexo. Esta contradicción muestra que S debe contener algún vértice de Q' . En consecuencia, $|S| \geq k$, como queríamos probar. \square

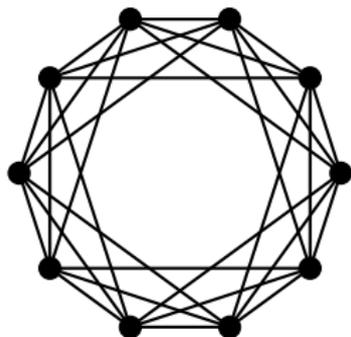
Grafos de Harary

Como la k -conectividad requiere $\delta(G) \geq k$, todo grafo con n vértices y k -conexo tiene al menos $\lceil nk/2 \rceil$ aristas. Los grafos de Harary son ejemplos que alcanzan dicha cantidad de aristas.

Grafos de Harary

Dados k y n tales que $n > k \geq 2$, ubicamos n vértices sobre una circunferencia formando los vértices de un n -ágono regular.

- ▶ Si k es par, formamos $H_{k,n}$ haciendo a cada vértice adyacente a los $k/2$ vértices más próximos a él en cada dirección de la circunferencia.

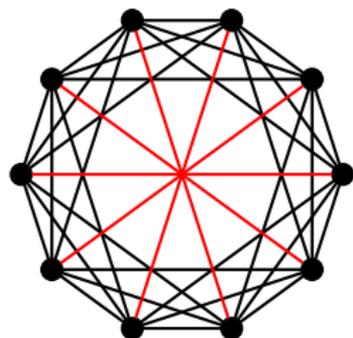


$H_{6,10}$

Grafos de Harary

Grafos de Harary (cont.)

- ▶ Si k es impar y n es par, $H_{k,n}$ se obtiene de $H_{k-1,n}$ agregando las aristas que unen vértices diametralmente opuestos.



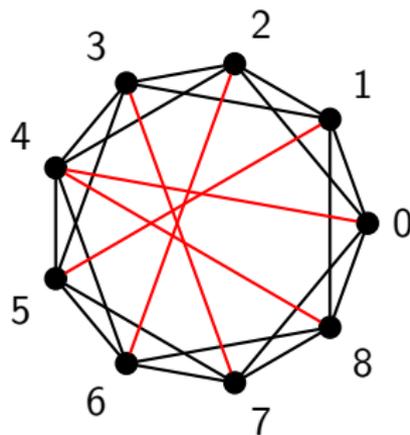
$H_{7,10}$

En los dos casos precedentes (que son aquellos en los que n o k es par), $H_{k,n}$ es k -regular.

Grafos de Harary

Grafos de Harary (cont.)

- ▶ Si k y n son ambos impares, construimos $H_{k,n}$ a partir de $H_{k-1,n}$, con los vértices numerados módulo n , agregando las aristas $\{i, i + (n-1)/2\}$ para cada $i \in \{0, \dots, (n-1)/2\}$.



$H_{5,9}$

Notemos que siempre que k es impar, $H_{k,n}$ es $H_{k-1,n}$ más las **aristas especiales** $\{i, i + \lfloor n/2 \rfloor\}$ para cada $i \in \{0, \dots, \lfloor (n-1)/2 \rfloor\}$.

Grafos de Harary

Teorema (Harary, 1962)

Si $n > k \geq 2$ entonces $\kappa(H_{k,n}) = k$. En consecuencia, el mínimo número de aristas en un grafo k -conexo de n vértices es $\lceil kn/2 \rceil$.

Demostración.

Sea $G = H_{k,n}$ y consideremos los vértices con la disposición circular de la definición.

Consideramos primero el caso $k = 2r$. Como $\delta(G) = k$, alcanza con probar que $\kappa(G) \geq k$. Para cada $S \subseteq V(G)$ tal que $|S| < k$, probaremos que $G - S$ es conexo. Consideremos $x, y \in V(G) - S$. Hay un camino horario de x a y y un camino antihorario de x a y .

Sean A y B los conjuntos de vértices internos de esos caminos.

Como $|S| < k$, S tiene menos de $k/2$ elementos en A o en B . Como en G cada vértice tiene aristas a los siguientes $k/2$ vértices en cada sentido de recorrido, borrando menos de $k/2$ vértices consecutivos no se puede bloquear el desplazamiento en ninguna dirección.

Entonces podemos encontrar un camino de x a y en $G - S$ a través del conjunto A o B en el cual S tiene menos de $k/2$ vértices. (...)

Grafos de Harary

Demostración (cont.)

Supongamos que $k = 2r + 1$ para algún $r \geq 1$. El grafo G consiste en los vértices $0, \dots, n - 1$ con cada vértice adyacente a los r vértices más próximos en cada dirección más las aristas especiales $\{i, i + \lfloor n/2 \rfloor\}$ para cada $i \in \{0, \dots, \lfloor (n - 1)/2 \rfloor\}$. Cuando n es impar, el vértice $\lfloor n/2 \rfloor$ es incidente en dos aristas especiales.

Para probar que $\kappa(G) = k$, consideremos un conjunto separador S y supongamos, por el absurdo, que $|S| < k$. Como $G - S$ es desconexo, existen vértices no adyacentes x e y de $G - S$ tal que todo camino que une x con y en G pasa por S . Sea $C(u, v)$ el conjunto de los vértices de S que se encuentran al ir de u a v en sentido horario (sin incluir a u ni a v). El conjunto separador S debe contener r vértices consecutivos de cada $C(x, y)$ y $C(y, x)$ para poder romper todos los caminos de x a y (si no, uno podría comenzar en x y dar sucesivos pasos hacia y). Como estamos suponiendo que $|S| \leq 2r$, S consiste exactamente en r vértices consecutivos en $C(x, y)$ y en $C(y, x)$. (...)

Grafos de Harary

Demostración (cont.)

Afirmamos que sigue habiendo un camino entre x e y a través de una arista especial incidente en x o y . Sean x' e y' los vecinos de x e y a través de aristas especiales, usando 0 como este vecino cuando uno de los vértices es $\lfloor n/2 \rfloor$. Notemos que $|C(x, y)| \neq |C(y, x)|$. En efecto, si fuera $|C(x, y)| = |C(y, x)|$ entonces n sería par y x e y serían diametralmente opuestos, contradiciendo que x e y no son adyacentes. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $|C(x, y)| < |C(y, x)|$. Notemos que $|C(x', y')| \geq |C(x, y)| - 1$ (donde estos conjuntos tienen tamaños distintos cuando n es impar, $x \in \{\lfloor n/2 \rfloor, \dots, n-1\}$ e $y \in \{0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor - 1\}$). Como $|C(x, y)| \geq r$, resulta que $|C(x', y')| \geq r - 1$. Por lo tanto, cuando borramos r vértices consecutivos de $C(y, x)$, todos los vértices de $C(y, x') \cup \{x'\}$ o $\{y'\} \cup C(y', x)$ se preservan. Esto prueba que al menos uno de los dos caminos entre x e y con estos conjuntos de vértices como vértices internos quedan en $G - S$. □

Conectividad por aristas

Conectividad por aristas

Un **conjunto desconectante** de un grafo G es un conjunto F de aristas de G tal que $G - F$ tiene más de una componente.

Un grafo es **k-arista-conexo** si todo conjunto desconectante tiene al menos k aristas.

La **arista-conectividad** de un grafo G , denotada $\kappa'(G)$, es el tamaño mínimo de un conjunto desconectante, es decir, el máximo k tal que G es k -arista-conexo.

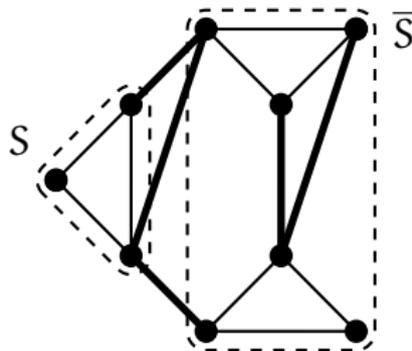
Dados $S, T \subseteq V(G)$, denotamos por $[S, T]$ el conjunto de aristas que tienen un extremo en S y otro en T .

Un **corte por aristas** es un conjunto de aristas $[S, \bar{S}]$ donde S es un subconjunto no vacío y propio de $V(G)$ y \bar{S} denota $V(G) - S$.

Conectividad por aristas

Observaciones

- ▶ Todo corte por aristas es un conjunto desconectante porque $G - [S, \bar{S}]$ no tiene caminos entre S y \bar{S} .
- ▶ La recíproca es falsa porque un conjunto desconectante puede tener aristas extra.



Conectividad y conectividad por aristas

Teorema (Whitney, 1932)

Si G es un grafo simple entonces

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G).$$

Demostración.

Las aristas incidentes en un vértice de grado mínimo forman un corte por aristas. Luego, $\kappa'(G) \leq \delta(G)$. Solo resta probar que $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$. Consideramos un corte por aristas de tamaño mínimo $[S, \bar{S}]$.

Si cada vértice de S es adyacente a cada vértice de \bar{S} entonces

$$\begin{aligned} \kappa'(G) &= |[S, \bar{S}]| = |S| \cdot |\bar{S}| = (|S| - 1)(|\bar{S}| - 1) + |S| + |\bar{S}| - 1 \\ &\geq |S| + |\bar{S}| - 1 = |V(G)| - 1 \geq \kappa(G), \end{aligned}$$

como queremos probar.

(...)

Conectividad y conectividad por aristas

Demostración (cont.)

Supongamos que, por el contrario, no todo vértice de S es adyacente a todo vértice de \bar{S} . Elegimos $x \in S$ e $y \in \bar{S}$ tal que x e y no son adyacentes. Sea T el conjunto de todos los vecinos de x en \bar{S} y todos los vértices de $S - \{x\}$ con vecinos en \bar{S} . Cada camino entre x e y pasa a través de T , así que T es un conjunto separador. En particular, $\kappa(G) \leq |T|$.

Más aún, el conjunto formado por las aristas de x a $T \cap \bar{S}$ junto con una arista desde cada vértice de $T \cap S$ a \bar{S} consiste en $|T|$ aristas de $[S, \bar{S}]$ distintas entre sí. Por lo tanto,

$$\kappa(G) \leq |T| \leq |[S, \bar{S}]| = \kappa'(G).$$



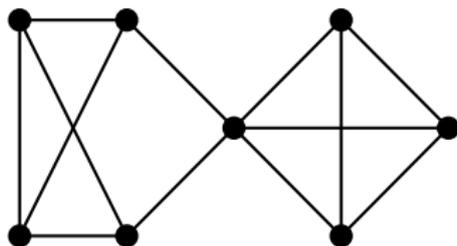
Conectividad y conectividad por aristas

- ▶ Hemos visto que $\kappa(G) = \delta(G)$ si G es un grafo completo, un grafo bipartito completo, un hipercubo o un grafo de Harary.
- ▶ Por el teorema anterior, también $\kappa'(G) = \delta(G)$ para estos mismos grafos.
- ▶ Sin embargo, para muchos grafos, el conjunto de aristas incidentes en un vértice de grado mínimo no es el tamaño mínimo de un corte por aristas, es decir, $\kappa'(G) < \delta(G)$.
- ▶ La situación $\kappa'(G) < \delta(G)$ se da precisamente cuando ningún corte por aristas mínimo aísla un vértice.

Conectividad y conectividad por aristas

Grafo tal que $\kappa < \kappa' < \delta$

En el siguiente grafo $\kappa = 1$, $\kappa' = 2$ y $\delta = 3$:



Notemos que ningún corte por aristas mínimo aísla un vértice.

- ▶ Cada desigualdad es arbitrariamente no ajustada.
- ▶ Por un lado, si $G = 2K_m$ entonces $\kappa(G) = \kappa'(G) = 0$ y $\delta(G) = m - 1$.
- ▶ Por otro lado, si G consiste en dos cliques de tamaño m que compartan un único vértice entonces $\kappa(G) = 1$ pero $\kappa'(G) = \delta(G) = m - 1$.

Conectividad y conectividad por aristas

Teorema

Si G es un grafo 3-regular entonces $\kappa(G) = \kappa'(G)$.

Demostración.

Como $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$, alcanza con considerar un conjunto separador mínimo S de G y mostrar un corte por aristas del mismo tamaño que $|S|$. Sean H_1 y H_2 dos componentes de $G - S$. Como S es un separador mínimo, cada $v \in S$ tiene un vecino en H_1 y un vecino en H_2 . Como G es 3-regular, v no puede tener dos vecinos en H_1 y dos en H_2 . Para cada $v \in S$, si v tiene un solo vecino en H_1 borramos la arista que lo une a su único vecino en H_1 ; de lo contrario, borramos la arista que lo une a su único vecino en H_2 . Veamos que estas $\kappa(G)$ aristas destruyen todos los caminos de H_1 a H_2 . Consideremos un camino P en G de H_1 a H_2 todos cuyos vértices internos pertenecen a S , donde P entra a S por v_1 y deja S por v_2 . Si la primera arista de P no fue borrada entonces v_1 tiene dos vecinos en H_1 y uno en H_2 ; pero esto obliga a que $v_1 = v_2$ y es la última arista de P la que fue borrada. \square

Conectividad por aristas

Cuando $\kappa'(G) < \delta(G)$, un corte por aristas mínimo no puede aislar un vértice. De hecho, si G es simple, siempre que $|[S, \bar{S}]| < \delta(G)$, el conjunto S (y también \bar{S}) tiene que tener más de $\delta(G)$ vértices.

Esto se sigue de una relación entre el tamaño de un corte por aristas $[S, \bar{S}]$ y el tamaño del subgrafo inducido por S .

Lema

Si S es un conjunto de vértices en un grafo G entonces

$$|[S, \bar{S}]| = \left(\sum_{v \in S} d_G(v) \right) - 2|E(G[S])|.$$

Demostración.

Cada arista en $G[S]$ contribuye dos veces a $\sum_{v \in S} d_G(v)$, mientras una arista en $[S, \bar{S}]$ contribuye solo una vez a esa misma sumatoria. Como esto cuenta todas las contribuciones, obtenemos

$$\sum_{v \in S} d_G(v) = |[S, \bar{S}]| + 2|E(G[S])|. \quad \square$$

Conectividad por aristas

Proposición

Si G es un grafo simple y $|[S, \bar{S}]| < \delta(G)$ para algún subconjunto no vacío S de $V(G)$ entonces $|S| > \delta(G)$.

Demostración.

Por la proposición anterior, tenemos que

$$\delta(G) > |[S, \bar{S}]| = \left(\sum_{s \in S} d(v) \right) - 2|E(G[S])|.$$

Usando que $d(v) \geq \delta(G)$ y $2|E(G[S])| \leq |S|(|S| - 1)$, obtenemos

$$\delta(G) > |S|\delta(G) - |S|(|S| - 1).$$

Equivalentemente,

$$(|S| - 1)|S| > (|S| - 1)\delta(G).$$

Como $|S| \neq 0$ y la desigualdad implica $|S| \neq 1$ entonces $|S| > 1$.

Cancelando $|S| - 1$ en ambos miembros obtenemos $|S| > \delta(G)$. \square

Enlaces

Enlace

Un **enlace** es un corte por aristas que no contiene propiamente otro corte por aristas.

Por ejemplo, P_3 tiene tres cortes por aristas, pero solo dos de ellos son enlaces porque el tercero contiene a los otros dos.

Proposición

Si G es un grafo conexo y F es un corte por aristas de G entonces F es un enlace de G si y sólo si $G - F$ tiene exactamente dos componentes.

Demostración.

Sea $F = [S, \bar{S}]$ un corte por aristas de G .

Supongamos primero que $G - F$ tiene exactamente dos componentes y sea F' un subconjunto propio de F . El grafo $G - F'$ contiene las dos componentes de $G - F$ más al menos una arista entre ellos, haciéndolo conexo. Luego, F es un enlace de G . (...)

Enlaces

Demostración (cont.)

Para la recíproca, supongamos que $G - F$ tiene más de dos componentes y vamos a probar que F no es un enlace. Como $G - F$ es la unión disjunta de $G[S]$ y $G[\bar{S}]$, uno de ellos tiene al menos dos componentes. Supongamos por simetría que es $G[S]$. Podemos escribir $S = A \cup B$, donde no hay aristas entre A y B . Entonces los cortes por aristas $[A, \bar{A}]$ y $[B, \bar{B}]$ son subconjuntos propios de F , lo que prueba que F no es un enlace. \square

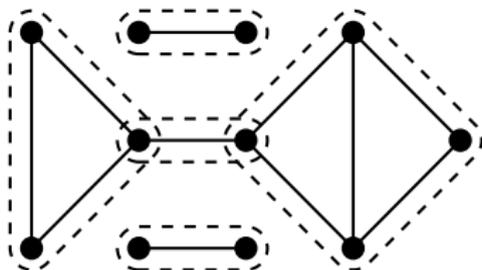
Bloques

Los subgrafos conexos sin vértices de corte forman una descomposición que es útil en muchos casos.

Recordemos que hay grafos conexos sin vértices de corte que no son 2-conexos: K_1 y K_2 .

Bloques

Un **bloque de un grafo G** es un subgrafo maximal de G que es conexo y no tiene vértices de corte.



Si un grafo G es conexo y no tiene vértices de corte entonces G se dice un **bloque**.

Propiedades de los bloques

- ▶ Una arista de un ciclo no puede ser un bloque ya que está propiamente contenida en un subgrafo conexo sin vértices de corte.
- ▶ Por lo tanto una arista es un bloque si y sólo si es una arista de corte.
- ▶ Luego, los bloques de un árbol son sus aristas.
- ▶ Si un bloque tiene más de dos vértices entonces es 2-conexo.
- ▶ Los bloques de un grafo sin bucles son sus vértices aislados, sus aristas de corte y sus subgrafos 2-conexos maximales.

Propiedades de los bloques

Proposición

Dos bloques en un grafo comparten a lo sumo un vértice.

Demostración.

Supongamos, por el absurdo, que dos bloques B_1 y B_2 tienen al menos dos vértices en común. Mostraremos que $B_1 \cup B_2$ es un subgrafo conexo sin vértices de corte, lo que contradice la maximalidad de B_1 y B_2 .

Cuando borramos un vértice de B_i , el grafo que se obtiene es conexo. Por lo tanto, retenemos un camino en B_i de cada vértice no borrado en B_i a cada vértice no borrado en $V(B_1) \cap V(B_2)$.

Como estamos suponiendo que B_1 y B_2 tienen al menos dos vértices en común, borrando un sólo vértice queda algún vértice en la intersección. Los caminos desde ese vértice a los vértices de B_1 y los vértices de B_2 que quedan muestran que $B_1 \cup B_2$ no puede desconectarse borrando un único vértice. Esta contradicción provino de suponer que dos bloques compartían más de un vértice. □

Grafo bloque-vértice de corte

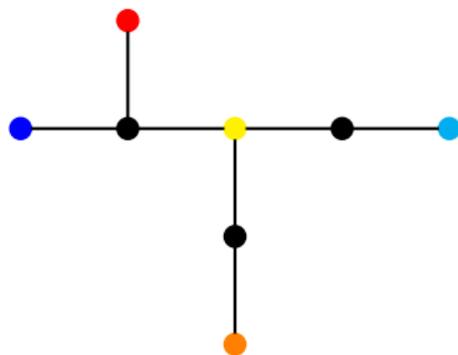
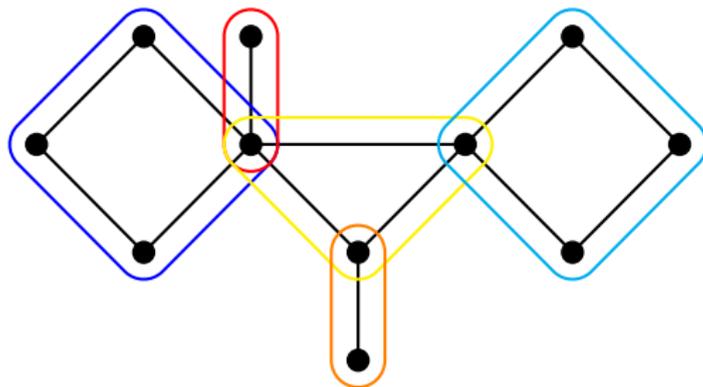
- ▶ Si G es un grafo, cada arista e por sí misma es un subgrafo conexo sin vértices de corte y por lo tanto e es arista de algún bloque de G .
- ▶ Como dos bloques de un mismo grafo comparten a lo sumo un vértice, **los bloques de un grafo forman una descomposición del mismo**.
- ▶ Cuando dos bloques comparten un vértice, dicho vértice debe ser un vértice de corte.
- ▶ La interacción entre bloques y vértices de corte se describe por un grafo especial.

Grafo bloque-vértice de corte

El **grafo bloque-vértice de corte** de un grafo G con conjunto de vértices de corte $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ y conjunto de bloques $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_\ell\}$ es el $\{X, \mathcal{B}\}$ -bigrafo, denotado $B(G)$, tal que $x_i B_j$ es una arista de $B(G)$ si y sólo si $x_i \in B_j$.

Grafo bloque-vértice de corte

Ejemplo de G y $B(G)$



Grafo bloque-vértice de corte

Lema

Si G es conexo, $B(G)$ es un árbol.

Demostración.

Sean B y B' dos bloques de G y vamos a probar que existe un camino entre B y B' en $B(G)$. Sean $u \in B$ y $v \in B'$. Como G es conexo, existe un camino de u a v en G . Este camino visita una secuencia de bloques comenzando en B y llegando a B' pasando a través de vértices de corte de G . Esto describe un camino de B a B' en $B(G)$. Concluimos que $B(G)$ es conexo.

Probaremos ahora que $B(G)$ no tiene ciclos. Supongamos que x es un vértice de corte de G que yace sobre un ciclo C de $B(G)$. Sean B y B' los vecinos de x en $B(G)$. El camino de B a B' en $C - x$ prueba que existe un camino de $B - x$ a $B' - x$ en G que no pasa por x , lo cual contradice el hecho que x es un vértice de corte de G . Concluimos que $B(G)$ es acíclico y luego también un árbol. \square

Consecuencia: Si G es conexo y no un bloque, tiene al menos dos **bloques hoja** (i.e. cada uno contiene un solo vértice de corte de G).

Grafos 2-conexos

Caminos interiormente disjuntos

Dos caminos de u a v son **interiormente disjuntos** si no tienen ningún vértice interno en común.

Teorema (Whitney, 1932)

Un grafo G que tiene al menos tres vértices es 2-conexo si y sólo si para cada $u, v \in V(G)$ existen dos caminos de u a v interiormente disjuntos.

Demostración.

Si existen dos caminos interiormente disjuntos de u a v , el borrado de un vértice no puede separar u de v . Luego, si esta condición se pide para todo par $u, v \in V(G)$, el borrado de ningún vértice puede evitar que cada vértice sea alcanzado desde cualquier otro vértice.

Concluimos que G es 2-conexo.

Para la recíproca, supongamos que G es 2-conexo. Vamos a probar que existen dos caminos de u a v interiormente disjuntos por inducción en $k = d_G(u, v)$. (...)

Grafos 2-conexos

Demostración (cont.)

Supongamos primero que $k = 1$. Como $\kappa'(G) \geq \kappa(G) \geq 2$, el grafo $G - uv$ es conexo. Todo camino de u a v en $G - uv$ es interiormente disjunto en G del camino u, uv, v .

Supongamos que $k > 1$. Sea w el último vértice interior en algún camino de longitud mínima de u a v . En particular, $d_G(u, w) = k - 1$. Por hipótesis inductiva, hay dos caminos P y Q de u a w que son interiormente disjuntos. Si $v \in V(P) \cup V(Q)$ entonces encontramos los caminos buscados en el ciclo $V(P) \cup V(Q)$. Supongamos entonces que $v \notin V(P) \cup V(Q)$.

Como G es 2-conexo, $G - w$ es conexo y contiene un camino R de u a v . Si ningún vértice interior de R pertenece a $V(P) \cup V(Q)$ entonces no hay más nada que probar. Supongamos lo contrario y sea z el último vértice interior de R en $V(P) \cup V(Q)$. Por simetría, podemos asumir que $z \in P$. Combinando el subcamino de P que va de u a z con el subcamino de R que va de z a v se obtiene un camino de u a v interiormente disjunto de Q, wv, v . □

Lema de expansión

Lema de expansión

Si G es un grafo k -conexo y G' se obtiene a partir de G agregando un nuevo vértice y con al menos k vecinos en G entonces G' es k -conexo.

Demostración.

Probaremos que todo conjunto separador S de G' tiene al menos k vértices. Si $y \in S$ entonces $S - \{y\}$ separa G , así que $|S| \geq k + 1$. Si $y \notin S$ y $N_G(y) \subseteq S$, entonces $|S| \geq k$. Solo resta considerar el caso en que $y \notin S$ y $N_G(y) \not\subseteq S$. En este caso, y y $N(y) - S$ yacen en una única componente de $G' - S$. Como S separa G' entonces S debe separar G . Como G es k -conexo, $|S| \geq k$. \square

Grafos 2-conexos

Teorema

Para cada grafo G con al menos tres vértices, las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1 G es conexo y no tiene vértices de corte.
- 2 Para todos dos vértices x e y de G , existen caminos de x a y interiormente disjuntos.
- 3 Para todos dos vértices x e y de G , existe un ciclo por x e y .
- 4 $\delta(G) \geq 1$ y cada par de aristas de G yace en un ciclo común de G .

Demostración.

La equivalencia 1 \Leftrightarrow 2 se sigue del teorema de Whitney que acabamos de ver.

La equivalencia 2 \Leftrightarrow 3 es inmediata pues la existencia de un ciclo por x e y equivale a la existencia de caminos de x a y interiormente disjuntos. (...)

Grafos 2-conexos

Demostración (cont.)

Veamos que ④ \Rightarrow ③. La condición $\delta(G) \geq 1$ implica que los vértices x e y no son aislados. Aplicamos la última parte de ④ a un par de aristas incidentes en x e y . Si existe una única tal arista, aplicamos la última parte de ④ a dicha arista junto con cualquier otra arista incidente en un tercer vértice.

Para completar la demostración supongamos que G satisface las propiedades equivalentes ① y ③ y probaremos ④. Como G es conexo, $\delta(G) \geq 1$. Consideremos dos aristas uv y xy . Agregamos a G los vértices w con vecindad $\{u, v\}$ y z con vecindad $\{x, y\}$. Como G es 2-conexo, el lema de expansión implica que el grafo G' resultante es 2-conexo.

Luego, la condición ③ vale para G' , así que w y z yacen en un ciclo C en G' . Como cada uno de w y z tiene grado 2, C debe contener los caminos u, w, v y x, z, y pero ninguna de las aristas uv y xy . Reemplazando los caminos u, w, v y x, z, y en C por las aristas uv y xy se encuentra un ciclo por uv y xy en G . \square

Grafos 2-conexos

Subdivisión

En un grafo G , una **subdivisión** de una arista uv es la operación de reemplazar uv con un camino u, w, v a través de un nuevo vértice w (que no tiene otros vecinos que u y v).

Corolario

Si G es un grafo 2-conexo y G' es un grafo que se obtiene de G subdividiendo una arista entonces G' es 2-conexo.

Demostración.

Sea G' formado a partir de G agregando un vértice w por la subdivisión de uv . Por el teorema anterior, para mostrar que G' es 2-conexo alcanza con encontrar un ciclo a través de aristas arbitrariamente elegidas e y f de G' .

Supongamos que $e, f \in E(G)$. Como G es 2-conexo, e y f yacen en un ciclo común C de G . Luego, e y f yacen en el ciclo de G' que se obtiene de C reemplazando la arista uv con el camino u, v, w (en caso que la arista uv sea una arista de C). (...)

Grafos 2-conexos

Demostración (cont.)

Si $e \in E(G)$ y $f \in \{uw, wv\}$ entonces modificamos de la misma forma el ciclo C de G que contiene a e y a uv .

Si $e, f \in \{uw, wv\}$ modificamos de la misma manera un ciclo cualquiera de G que contiene a uv . □

Los grafos 2-conexos tienen una caracterización que asegura su construcción a partir de un ciclo y caminos: la descomposición en orejas.

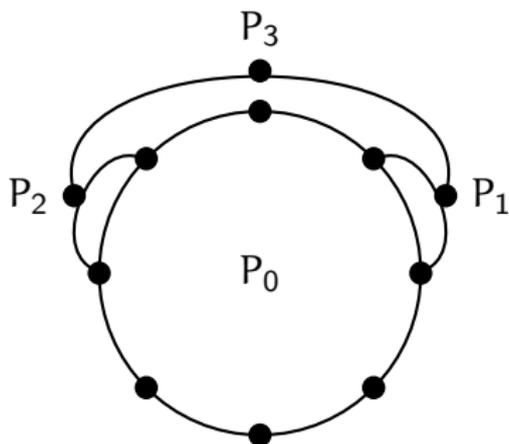
Descomposición en orejas

Orejas

Una **oreja** de un subgrafo H de un grafo G es un camino no trivial en G cuyos únicos vértices de H son sus extremos.

Descomposición en orejas

Una **descomposición en orejas** de G es una descomposición P_0, \dots, P_k de G tal que P_0 es un ciclo y, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, P_k es una oreja de $P_0 \cup \dots \cup P_{i-1}$ en G .



Grafos 2-conexos

Teorema (Whitney, 1932)

Un grafo es 2-conexo si y sólo si tiene una descomposición en orejas. Más aún, cada ciclo en un grafo 2-conexo es el ciclo inicial en alguna descomposición en orejas.

Demostración.

Para probar que todo grafo que tiene una descomposición en orejas es 2-conexo observamos que los ciclos son 2-conexos y probaremos que agregar una oreja preserva la 2-conexidad. Sean u y v los extremos de una oreja P que se agrega a un grafo 2-conexo G . El agregado de una arista no puede reducir la conectividad así que $G + uv$ es 2-conexo. Una sucesión de subdivisiones de aristas transforma $G + uv$ en el grafo $G \cup P$ en el cual P es una oreja de G . Como las subdivisiones preservan la 2-conexidad entonces $G \cup P$ es 2-conexo. (...)

Grafos 2-conexos

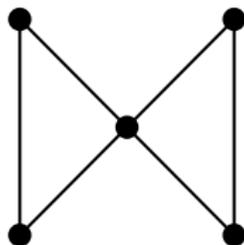
Demostración (cont.)

Dado un grafo 2-conexo G , construimos una descomposición en orejas de G a partir de un ciclo cualquiera C de G . Vamos a construir recursivamente una secuencia $G_0, G_1, G_2, \dots, G_k$ donde $G_0 = C$, cada uno de los siguientes grafos se obtiene del anterior por el agregado de una oreja y $G_k = G$. Si $i \geq 0$ y $G_i \neq G$, consideramos una arista uv de $G - E(G_i)$ y una arista xy de $E(G_i)$. Como G es 2-conexo, uv y xy yacen en un ciclo común C' de G . Sea P el camino en C' que contiene a uv y exactamente dos vértices de G_i , uno en cada extremo de P . Ahora P puede agregarse a G_i para obtener un subgrafo G_{i+1} de G en el cual P es una oreja. Como G_{i+1} tiene más aristas que G_i , este proceso culmina en algún $G_k = G$. □

Grafos 2-arista-conexos

Cada grafo 2-conexo es 2-arista-conexo, pero la recíproca no vale.

El siguiente grafo (conocido como **butterfly** o **bowtie**)



es 2-arista-conexo pero no 2-conexo.

Como los grafos 2-arista-conexos son más generales, se requiere de una operación más general para su descomposición.

Grafos 2-arista-conexos

Oreja cerrada

Una **oreja cerrada** de un subgrafo H en un grafo G es un ciclo C en G que tiene un único vértice en H .

Descomposición en orejas cerradas

Una **descomposición en orejas cerradas** de G es una descomposición P_0, \dots, P_k de G tal que P_0 es un ciclo y, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, P_i es una oreja (abierta) o una oreja cerrada de $P_0 \cup \dots \cup P_{i-1}$.

Descomposición en orejas cerradas

Teorema

Un grafo es 2-arista-conexo si y sólo si tiene una descomposición en orejas cerradas. Mas aún, cada ciclo de un grafo 2-arista-conexo es el ciclo inicial en alguna descomposición en orejas cerradas.

Demostración.

Recordemos que las aristas de corte son aquellas que no pertenecen a ningún ciclo. Luego, los grafos 2-arista-conexos son aquellos grafos conexos en los que toda arista pertenece a algún ciclo. El ciclo inicial es 2-arista-conexo y, cada vez que agregamos una oreja o una oreja cerrada, cada una de las aristas que se agrega pertenece a un ciclo. (...)

Descomposición en orejas cerradas

Demostración (cont.)

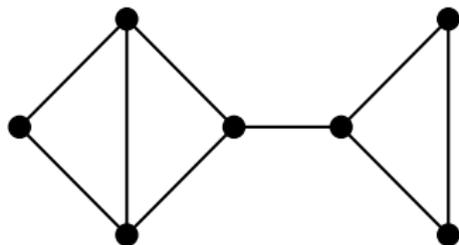
Recíprocamente, dado un grafo 2-arista-conexo G , sea P_0 un ciclo en G . Vamos a construir recursivamente una secuencia $G_0, G_1, G_2, \dots, G_k$ donde $G_0 = P_0$, cada uno de los siguientes grafos se obtiene del anterior por el agregado de una oreja abierta o cerrada y $G_k = G$. Sea $i \geq 0$ y supongamos que $G_i \neq G$. Como G es conexo, existe una arista $uv \in E(G) - E(G_i)$ con $u \in V(G_i)$. Como G es 2-arista-conexo, uv pertenece a algún ciclo C de G . Sea P_{i+1} el camino o el ciclo que se forma recorriendo C desde u hasta volver a $V(G_i)$. Entonces P_{i+1} es una oreja abierta o cerrada de G_i en G y sea $G_{i+1} = G_i \cup P_{i+1}$. Como G_{i+1} tiene más aristas que G_i , este proceso termina en algún $G_k = G$. \square

Orientación de mapas de caminos

¿Cuándo es posible dar a cada tramo en un mapa de caminos un sentido de circulación de manera que todas las ubicaciones del mapa sean alcanzables entre sí?

Recordemos que una orientación de un grafo G es un digrafo D que se obtiene ordenando los extremos de cada arista para que uno de ellos sea la cola y otro la cabeza y que un digrafo D es fuerte si para cada par ordenado (u, v) de vértices de D existe un camino de u a v en D . Usando esta terminología, la pregunta anterior puede formularse de la siguiente forma: ¿cuándo un grafo admite una orientación fuerte?

Por ejemplo, el siguiente grafo no admite una orientación fuerte:



Grafos 2-arista-conexos

El siguiente teorema es un ejemplo de aplicación del teorema de descomposición en orejas cerradas.

Teorema (Robbins, 1939)

Un grafo tiene una orientación fuerte si y sólo si G es 2-arista-conexo.

Demostración.

Sea G un grafo. Si G fuese desconexo entonces G no tendría orientaciones fuertes. Si G tuviese una arista de corte con extremos u y v que en una orientación D de G se orientase de u hacia v entonces no habría caminos de v a u en D . Concluimos que para que G tenga una orientación fuerte debe ser 2-arista-conexo.

Recíprocamente, supongamos que G es 2-arista-conexo.

Consideremos una descomposición en orejas cerradas de G . Si orientamos el ciclo inicial como un (digrafo) ciclo y cada camino como un (digrafo) camino entonces, por inducción, el grafo resultante es fuerte. □

Teorema de Menger

Hemos comparado dos medidas de buena conexión: invulnerabilidad a borrado de vértices y multiplicidad de caminos alternativos. Extendiendo el Teorema de Whitney, mostramos que estas dos condiciones coinciden. Para ello debemos introducir medidas “locales” de la conexidad entre pares de vértices.

x, y -separador/corte. $\kappa_G(x, y)$. $\lambda_G(x, y)$

Dados vértices distintos $x, y \in V(G)$, un conjunto $S \subseteq V(G) - \{x, y\}$ es un x, y -separador o x, y -corte si $G - S$ no tiene un camino de x a y . Denotamos por $\kappa_G(x, y)$ el tamaño mínimo de un x, y -corte.

Denotamos por $\lambda_G(x, y)$ el tamaño máximo de un conjunto de caminos de x a y interiormente disjuntos de a pares.

X, Y -camino

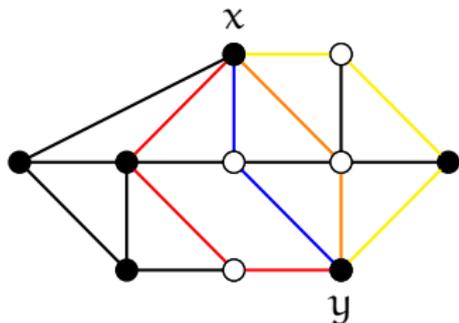
Si $X, Y \subseteq V(G)$, un X, Y -camino es un camino que tiene su primer vértice en X , su último vértice en Y y ningún otro vértice en $X \cup Y$.

Teorema de Menger

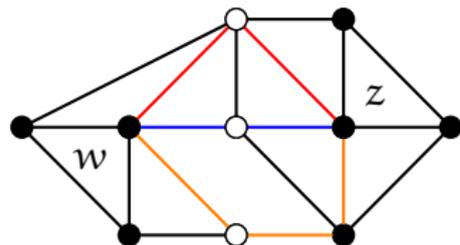
Un x, y -corte debe contener un vértice interior de cada camino de x a y . Como ningún vértice puede ser interior a dos caminos interiormente disjuntos:

$$\kappa_G(x, y) \geq \lambda_G(x, y).$$

Luego, los problemas de corte mínimo entre dos vértices y de conjunto máximo de caminos interiormente disjuntos entre estos mismos vértices son duales.



$$\kappa_G(x, y) = \lambda_G(x, y) = 4$$



$$\kappa_G(w, z) = \lambda_G(w, z) = 3$$

El grafo G es 3-conexo y entre cada par de vértices podemos encontrar tres caminos interiormente disjuntos.

Teorema de Menger

Teorema de Menger (Menger, 1927)

Si x e y son vértices no adyacentes de un grafo G entonces el tamaño mínimo de un x, y -corte es igual al tamaño máximo de un conjunto de caminos de x a y interiormente disjuntos entre sí.

Demostración.

Un x, y -corte debe contener al menos un vértice interno de cada camino en un conjunto de caminos de x a y interiormente disjuntos entre sí. Como estos vértices internos son distintos dos a dos entonces $\kappa_G(x, y) \geq \lambda_G(x, y)$.

Vamos a probar la igualdad por inducción en $n = |V(G)|$.

Si $n = 2$, como x e y no son adyacentes, $\kappa_G(x, y) = \lambda_G(x, y) = 0$.

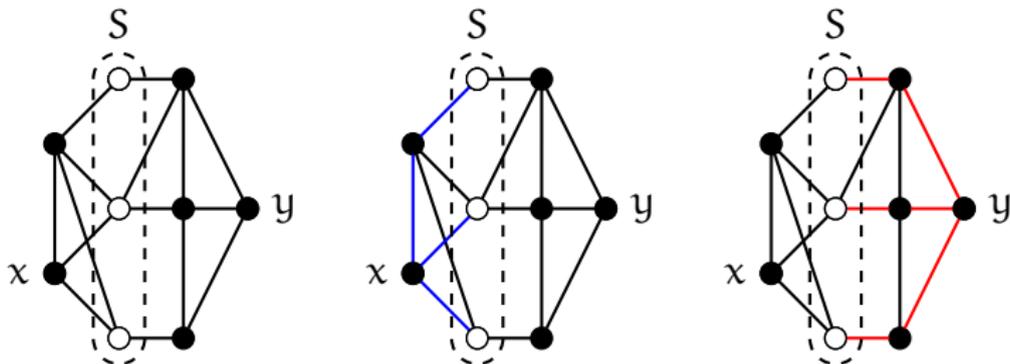
Supongamos que $n > 2$. Sea $k = \kappa_G(x, y)$. Vamos a construir k caminos de x a y interiormente disjuntos entre sí. Notemos que como $N(x)$ y $N(y)$ son x, y -cortes entonces ningún corte mínimo contiene propiamente $N(x)$ o $N(y)$. (...)

Teorema de Menger

Demostración (cont.)

Caso 1: G tiene un x, y -corte mínimo S distinto de $N(x)$ y $N(y)$.

Para obtener los $k = |S|$ caminos deseados, combinaremos k x, S -caminos y k S, y -caminos que obtendremos por hipótesis inductiva.

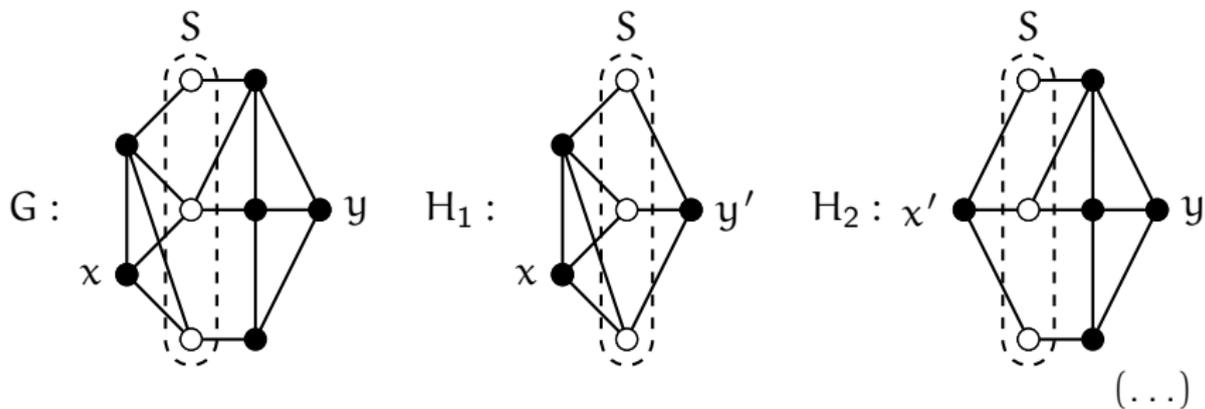


Sea V_1 el conjunto de vértices en S, x -caminos y V_2 el conjunto de vértices en S, y -caminos. Afirmamos que $S = V_1 \cap V_2$. Como S es un x, y -corte minimal, todo vértice de S pertenece a un camino de x a y ; por lo tanto, $S \subseteq V_1 \cap V_2$. (...)

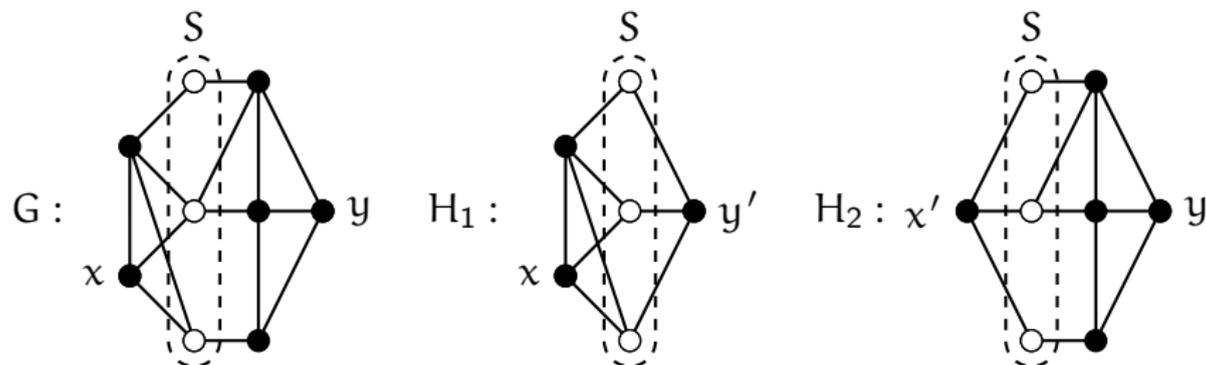
Teorema de Menger

Demostración (cont.)

Supongamos por el absurdo $S \neq V_1 \cap V_2$ y sea $v \in (V_1 \cap V_2) - S$. Luego, el subcamino de x a v en un x, S -camino y el subcamino de v a y en un S, y -camino forman un x, y -camino que evita el x, y -corte S . Esta contradicción prueba que $S = V_1 \cap V_2$. Del mismo modo, V_1 no interseca $N(y) - S$ y V_2 no interseca $N(x) - S$. Formamos H_1 agregando a $G[V_1]$ un vértice y' con aristas a todo S y formamos H_2 agregando a $G[V_2]$ un vértice x' con aristas a todo S :



Teorema de Menger



Demostración (cont.)

Cada camino de x a y en G empieza con un x, S -camino (contenido en H_1), así que todo x, y' -corte en H_1 es un x, y -corte en G . Por lo tanto, $\kappa_{H_1}(x, y') = k$. Análogamente, $\kappa_{H_2}(x', y) = k$. Como V_1 no interseca $N(y) - S$ y V_2 no interseca $N(x) - S$ entonces tanto H_1 como H_2 tiene menos vértices que G . Como $V_1 \cap V_2 = S$, los k caminos de x a y' en H_1 con y' borrado y los k caminos de x' a y en H_2 con x' borrado son x, S -caminos y S, y -caminos, respectivamente, que se combinan para formar k caminos de x a y en G interiormente disjuntos de a pares. (...)

Teorema de Menger

Demostración (cont.)

Caso 2: *Los únicos x, y -cortes mínimos son $N(x)$ y $N(y)$.*

Por un lado, si G tiene un vértice $v \notin \{x\} \cup N(x) \cup \{y\} \cup N(y)$ entonces $\kappa_{G-v}(x, y) = k$ (ya que v no pertenece a ningún corte mínimo) y, aplicando la hipótesis inductiva a $G - v$ se obtienen los k caminos deseados de x a y en G . Por otro lado, si existe $u \in N(x) \cap N(y)$ entonces $\kappa_{G-u}(x, y) = k - 1$ (ya que u aparece en cada x, y -corte mínimo) y, aplicando la hipótesis inductiva a $G - u$, se obtienen $k - 1$ caminos que se pueden combinar con el camino x, u, y . Concluimos que podemos asumir que $N(x)$ y $N(y)$ particionan $V(G) - \{x, y\}$. Sea G' el grafo bipartito con bipartición $\{N(x), N(y)\}$ y conjunto de aristas $[N(x), N(y)]$. Todo camino de x a y en G usa alguna arista de $N(x)$ a $N(y)$, de manera que los x, y -cortes en G son precisamente los cubrimientos por vértices de G' . Luego, $\beta(G') = k$. Por el teorema de König, G' tiene un matching de tamaño k . Estas k aristas dan lugar a k caminos de x a y de longitud 3 e interiormente disjuntos entre sí. \square

Teorema de Menger

Vamos a derivar una variante del Teorema de Menger para caminos disjuntos por aristas. Para ello definimos medidas “locales” de la conectividad a través de aristas.

$$\kappa'_G(x, y), \lambda'_G(x, y)$$

Sean x e y dos vértices de un grafo G .

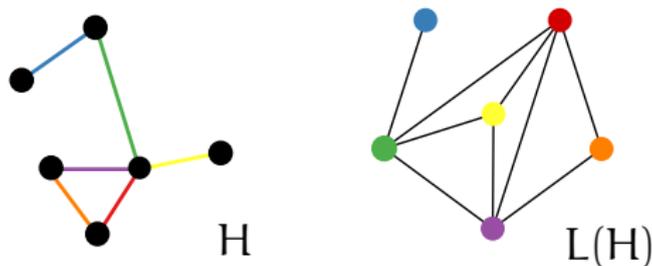
Un **conjunto x, y -desconectante** es un conjunto de aristas de G cuya remoción hace que y no sea alcanzable desde x . Denotamos por $\kappa'_G(x, y)$ el tamaño mínimo de un conjunto x, y -desconectante. Denotamos por $\lambda'_G(x, y)$ el tamaño máximo de un conjunto de caminos de x a y disjuntos por aristas.

La derivación de la variante del Teorema de Menger para caminos disjuntos por aristas se obtendrá aplicando al teorema original el operador “grafo de línea”.

Teorema de Menger

Grafo línea

El **grafo línea de un grafo H** , denotado $L(H)$, es el grafo cuyos vértices son las aristas de H y dos aristas de H son adyacentes en $L(H)$ si y sólo si son distintas e inciden en un vértice común.



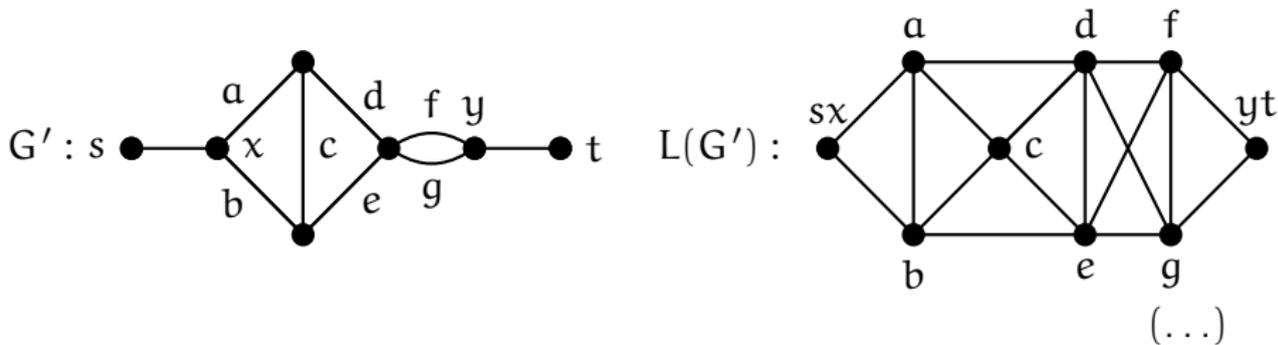
Teorema de Menger

Teorema

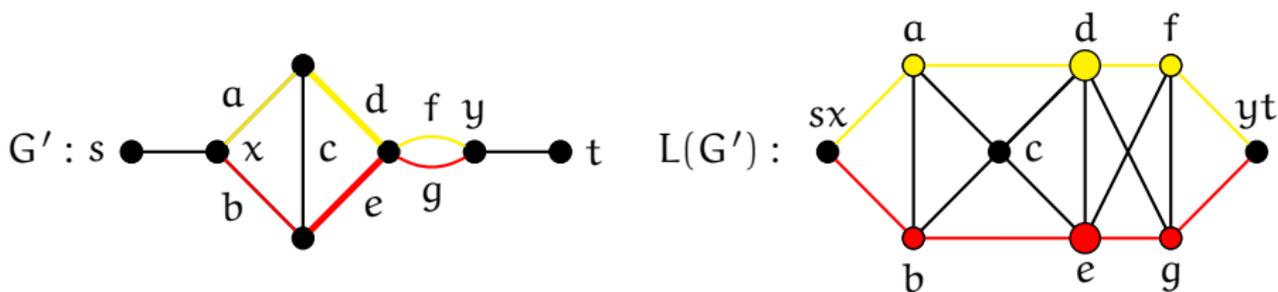
Si x e y son vértices distintos de un grafo G , el tamaño mínimo de un conjunto x, y -desconectante de aristas es igual al tamaño máximo de un conjunto de caminos de x a y disjuntos por aristas.

Demostración.

Sea G' el grafo que se obtiene de G agregando dos nuevos vértices s y t y dos nuevas aristas sx e yt . Esto no cambia $\kappa'(x, y)$ ni $\lambda'(x, y)$ y podemos pensar en cada uno de los caminos de x a y como comenzando en la arista sx y terminando en la arista yt .



Demostración (cont.)



Un conjunto de aristas desconecta x e y en G si y sólo si es un sx, yt -corte en $L(G')$. En particular, $\kappa'_G(x, y) = \kappa_{L(G')}(sx, yt)$.

De forma similar, caminos de x a y en G que no compartan aristas se transforman por el operador grafo de línea en caminos interiormente disjuntos de sx a yt en $L(G')$ y viceversa. Luego, $\lambda'_G(x, y) = \lambda_{L(G')}(sx, yt)$.

Como $x \neq y$, no tenemos aristas de sx a yt en $L(G')$. Aplicando el Teorema de Menger a $L(G')$ concluimos que

$$\kappa'_G(x, y) = \kappa_{L(G')}(sx, yt) = \lambda_{L(G')}(sx, yt) = \lambda'_G(x, y). \quad \square$$

Teorema de Menger

La versión global para grafos k -conexos, debida a Whitney (1932), se conoce también como Teorema de Menger.

Para su demostración, utilizaremos el siguiente resultado preliminar.

Lema

El borrado de todas las aristas que unen un mismo par de vértices reduce la conectividad en a lo sumo 1.

Demostración.

Sea G un grafo y sean x e y dos vértices adyacentes en G .

Denotamos por $G - xy$ el grafo que se obtiene borrando todas las aristas que tengan a x y a y como extremos. Como cada conjunto separador de G es un conjunto separador de $G - xy$, tenemos que $\kappa(G - xy) \leq \kappa(G)$. Si $\kappa(G - xy) = \kappa(G)$ no hay nada que probar. Supongamos que $\kappa(G - xy) < \kappa(G)$ y sea S un conjunto separador de $G - xy$ tal que $|S| < \kappa(G)$. Como $G - S$ es conexo, $(G - xy) - S$ tiene dos componentes $G[X]$ y $G[Y]$, con $x \in X$ e $y \in Y$. En $G - S$, las únicas aristas uniendo X con Y unen x con y . (...)

Teorema de Menger

Demostración (cont.)

Si $|X| \geq 2$ entonces $S \cup \{x\}$ es un conjunto separador de G y, luego, $\kappa(G) \leq \kappa(G - xy) + 1$; es decir, $\kappa(G - xy) \geq \kappa(G) - 1$.

Por simetría, la misma desigualdad vale si $|Y| \geq 2$.

En caso contrario, $|S| = |V(G)| - 2$. Como estamos asumiendo que $|S| < \kappa(G)$, se sigue que

$$\kappa(G) \geq |S| + 1 = |V(G)| - 1,$$

lo que implica que cualesquiera dos vértices distintos de G son adyacentes en G . Pero entonces

$$\kappa(G - xy) = |V(G)| - 2 = \kappa(G) - 1,$$

como queríamos probar. □

Teorema de Menger

Teorema

Sea G un grafo. La conectividad de G es igual al máximo k tal que $\lambda_G(x, y) \geq k$ para todos los vértices distintos x e y de G . La arista-conectividad de G es igual al máximo k tal que $\lambda'_G(x, y) \geq k$ para todos los vértices distintos x e y de G .

Demostración.

Para la afirmación sobre conectividad, notamos que $\kappa_G(x, y) = \lambda_G(x, y)$ para todos los x e y no adyacentes en G y que $\kappa(G)$ es el mínimo de esos valores. Alcanza con probar que $\lambda_G(x, y)$ no puede ser más pequeño que $\kappa(G)$ cuando x e y son adyacentes. Si $G - xy$ se obtiene removiendo todas las aristas entre x e y , por el Teorema de Menger (versión local) y el lema anterior:

$$\lambda_G(x, y) \geq 1 + \lambda_{G-xy}(x, y) = 1 + \kappa_{G-xy}(x, y) \geq 1 + \kappa(G-xy) \geq \kappa(G).$$

Como $\kappa'(G) = \min_{x, y \in V(G), x \neq y} \kappa'_G(x, y)$, la afirmación sobre arista-conectividad se sigue de inmediato del teorema anterior. \square

Lema del abanico

Abanico

Dados un vértice x y un conjunto U vértices, un x, U -abanico es un conjunto de caminos de x a U tales que de a pares solo comparten el vértice x .

Lema del abanico (Dirac, 1960)

Un grafo es k -conexo si y sólo si tiene al menos $k + 1$ vértices y, para cada elección de x y U con $|U| \geq k$, tiene un x, U -abanico de tamaño k .

Lema del abanico

Demostración.

Supongamos que G es k -conexo. Luego, G tiene al menos $k + 1$ vértices. Sean x y U tales que $|U| \geq k$. Sea G' que se obtiene agregando un vértice y adyacente a todos los vértices de U . El lema de expansión implica que G' es también k -conexo y el Teorema de Menger asegura la existencia de k caminos de x a y interiormente disjuntos. Borrando y de dichos caminos se obtiene un x, U -abanico de tamaño k .

Recíprocamente, supongamos que G tiene al menos $k + 1$ vértices y satisface la condición del abanico. Luego, para cada $v \in V(G)$, $U = V(G) - \{v\}$ satisface $|U| \geq k$ y existe un v, U -abanico de tamaño k . Esto prueba que todo vértice de G tiene al menos k vecinos. Dados $w, z \in V(G)$, sea $U = N(z)$. Como $|U| \geq k$, tenemos un w, U -abanico de tamaño k . Extendiendo cada camino con una arista hasta z , obtenemos k caminos de w a z interiormente disjuntos, por lo que $\lambda_G(w, z) \geq k$. Como w y z son arbitrarios, G es k -conexo. □

Generalización del lema del abanico

Teorema

Sea G un grafo k -conexo y sean X e Y dos conjuntos disjuntos de vértices de G a cuyos elementos se asignan pesos enteros positivos u y w tales que $\sum_{x \in X} u(x) = \sum_{y \in Y} w(y) = k$. Entonces G tiene k caminos internamente disjuntos de X a Y tales que $u(x)$ de ellos tienen un extremo en x para cada $x \in X$ y $w(y)$ de ellos tienen un extremo en y para cada $y \in Y$.

Demostración.

Replicamos los vértices de X e Y , agregando vértices con la misma vecindad de manera de conseguir $u(x)$ copias de cada $x \in X$ y $w(y)$ copias de cada $y \in Y$. Como G es k -conexo, cada vértice de G tiene k o más vecinos y, por el lema de expansión, el grafo así obtenido es también k -conexo. Por último, agregamos un vértice adicional s adyacente a todas las copias de vértices de X y un vértice t adyacente a todas las copias de vértices de Y . Llamamos G' al grafo así obtenido. Como s y t tienen k vecinos, el lema de expansión asegura que G' también es k -conexo. (...)

Generalización del lema del abanico

Demostración (cont.)

Por el Teorema de Menger, hay k caminos de s a t internamente disjuntos en G' . Si les borramos los extremos s y t obtenemos caminos disjuntos por vértices que unen las k copias de vértices de X con las k copias de vértices de Y . Reemplazando cada copia de un vértice de X o de Y por el vértice original, se obtienen los caminos buscados. □

Conectividad y ciclos

Teorema (Dirac, 1960)

Sea G un grafo k -conexo para algún $k \geq 2$. Si S es un conjunto de k vértices de G entonces G tiene un ciclo cuyo conjunto de vértices contiene a S .

Demostración.

Por inducción en k . El teorema vale para $k = 2$ por el Teorema de Whitney.

Supongamos que $k > 2$. Sea S un conjunto de k vértices de G y sea $x \in S$. Como G es también $(k - 1)$ -conexo, la hipótesis inductiva implica que los elementos de $S - \{x\}$ yacen en algún ciclo C de G . Supongamos primero que $|V(C)| = k - 1$. Como G es $(k - 1)$ -conexo, el lema del abanico nos asegura la existencia de un $x, V(C)$ -abanico de tamaño $k - 1$ y los caminos del abanico desde dos vértices consecutivos del ciclo permiten extender C a un ciclo que contiene a x . (...)

Conectividad y ciclos

Demostración (cont.)

Por lo tanto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $|V(C)| \geq k$. Como G es k -conexo, G tiene un $x, V(C)$ -abanico de tamaño k . Afirmamos que nuevamente tiene dos caminos que se desvían de C para formar un ciclo que contiene a x manteniendo los vértices de $S - \{x\}$. Sean v_1, \dots, v_{k-1} los vértices de $S - \{x\}$ siguiendo su orden de aparición en un recorrido de C y, para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$, sea V_i el conjunto de vértices de C desde v_i hasta el vértice inmediatamente anterior a v_{i+1} (siguiendo el mismo recorrido de C y donde v_k denota v_1).

Por construcción, $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_{k-1}\}$ es una partición de $V(C)$ en $k-1$ conjuntos. Como el $x, V(C)$ -abanico tiene k caminos, el principio del palomar implica que dos de ellos llegan a $V(C)$ en vértices u y u' que pertenecen a un mismo conjunto de \mathcal{P} .

Reemplazando el camino de u a u' en C por los caminos de u a x y de x a u' en el abanico se construye un nuevo ciclo que contiene a x y pasa por todos los vértices en $S - \{x\}$. □

Flujo en redes

Consideremos una red de cañerías con válvulas que permiten el flujo en una única dirección. Cada tramo de la cañería tiene una capacidad de flujo por unidad de tiempo. Modelamos esta situación con un vértice en cada unión de cañerías y una arista dirigida para cada tramo de la cañería, con un peso que indica su capacidad.

Asumimos también que el flujo no puede acumularse en las uniones. Dados dos puntos s y t de la red nos preguntamos: ¿cuál es la máxima cantidad de flujo (por unidad de tiempo) de s a t ?

Esta pregunta surge en muchas situaciones, por ejemplo, una red de rutas con limitaciones al tránsito o una red de computadoras con determinadas capacidades para la transmisión de datos entre ellas.

Flujo factible

Red

Una **red** es un digrafo con **capacidades** no negativas $c(e)$ para cada arista e y dos vértices distinguidos: una **fuerza** s y un **sumidero** t .

Flujo

Un **flujo** f es una función que asigna un valor $f(e)$ a cada arista e de la red. Denotamos por $f^+(v)$ el flujo total a través de aristas que dejan v y por $f^-(v)$ el flujo total a través de aristas que ingresan a v .

Flujo factible

Un flujo es **factible** si satisface las **restricciones de capacidad** $0 \leq f(e) \leq c(e)$ para cada arista e y las **restricciones de conservación** $f^+(v) = f^-(v)$ para cada vértice $v \notin \{s, t\}$.

Flujo máximo

Valor de un flujo

El **valor val(f)** de un flujo f es el flujo neto entrante $f^-(t) - f^+(t)$ en el sumidero.

Obseración

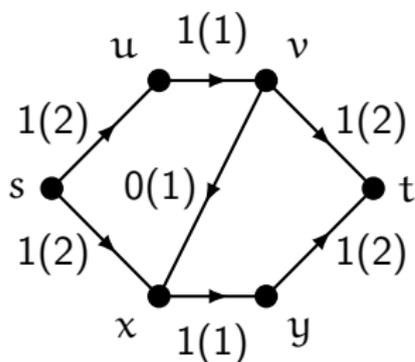
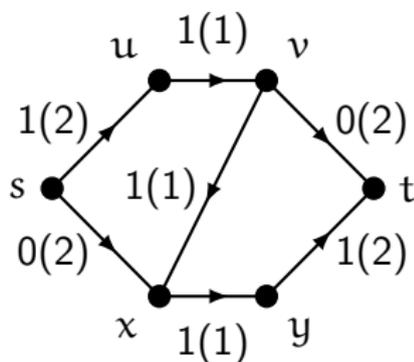
El **flujo cero**, que asigna a cada arista el valor 0, es un flujo factible de valor 0.

Flujo máximo

Un **flujo máximo** en una red es un flujo factible con valor máximo.

Ejemplo

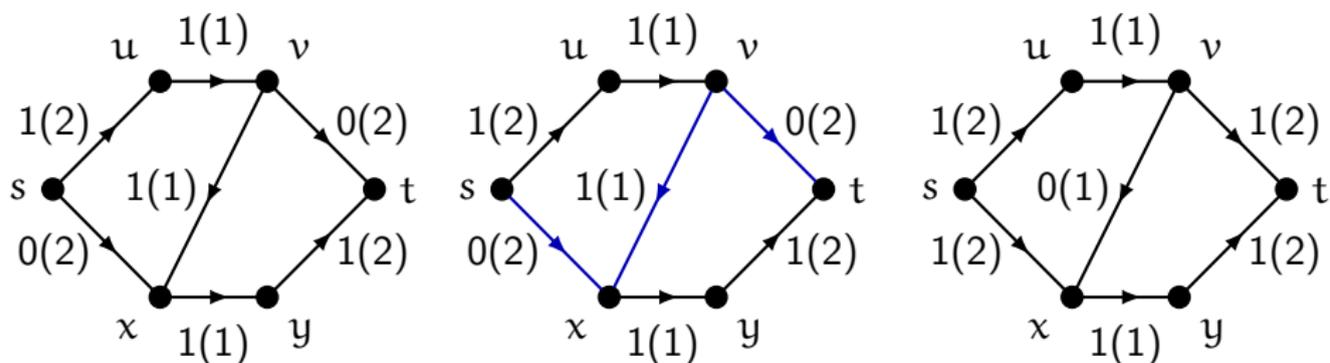
En la siguiente red mostramos un flujo no nulo. Las capacidades de las aristas se muestran entre paréntesis.



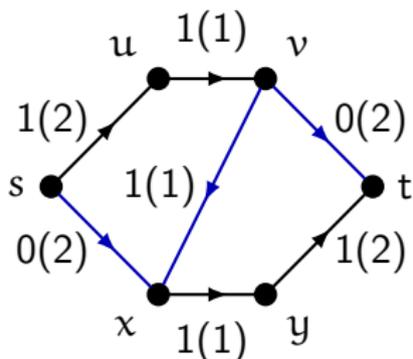
Un camino de la fuente al sumidero por aristas que no tuvieran su capacidad colmada nos permitiría incrementar el flujo. En este caso no hay ningún camino a lo largo del cual ninguna arista tenga su capacidad colmada. Sin embargo existe un flujo con valor 2. El flujo en este segundo caso resulta ser máximo, ya que ningún otro flujo factible tiene valor mayor a 2.

Caminos aumentantes

Vamos a presentar una forma más general de incrementar el flujo en una red. Además de permitir pasar flujo en la dirección de aristas que no tienen su capacidad colmada, también vamos a permitir contrarrestar flujo presente con flujo en la dirección opuesta. En nuestro ejemplo, podemos llevar una unidad adicional del flujo de s a t contrarrestando el flujo de v a x .



Camino aumentante



Camino con tolerancia positiva

Si f es un flujo factible en una red N y P es un camino en el grafo subyacente de N con un extremo en s entonces P es **de tolerancia positiva** si para cada $e \in E(P)$ valen las siguientes condiciones:

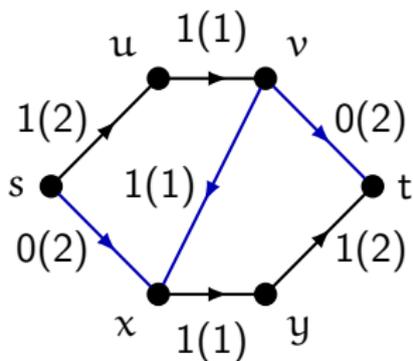
- 1 si P recorre e en la dirección de la red entonces $f(e) < c(e)$; y
- 2 si P recorre e en la dirección contraria entonces $f(e) > 0$.

Para cada arista e de P definimos la **tolerancia $\epsilon(e)$** como igual a $c(e) - f(e)$ o $f(e)$ dependiendo de si P recorre e en el sentido de N o el contrario. La **tolerancia de P** es $\min_{e \in E(P)} \epsilon(e)$.

Caminos aumentantes

Camino f -aumentante

Si f es un flujo factible en una red N , un **camino f -aumentante** es un camino de tolerancia positiva con extremos s y t .



Caminos aumentantes

Lema

Si P es un camino f -aumentante con tolerancia z entonces incrementando el flujo en z en las aristas recorridas por P en la dirección de la red y decrementando el flujo en z en las aristas recorridas por P en la dirección contraria a la red produce un flujo factible f' con valor $\text{val}(f') = \text{val}(f) + z$.

Demostración.

La definición de tolerancia asegura que $0 \leq f'(e) \leq c(e)$ para cada arista e , de manera que f' satisface las restricciones de capacidad. Solo debemos verificar las restricciones de conservación en los vértices de P , ya que el flujo no cambia en los demás vértices. En las aristas de P incidentes en un vértice interno v de P se da alguna de las siguientes situaciones:

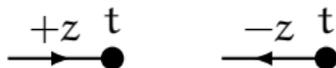


En todos los casos, los cambios en los flujos salientes y entrantes en v son iguales, por lo que el flujo neto en v sigue siendo 0. (...)

Caminos aumentantes

Demostración (cont.)

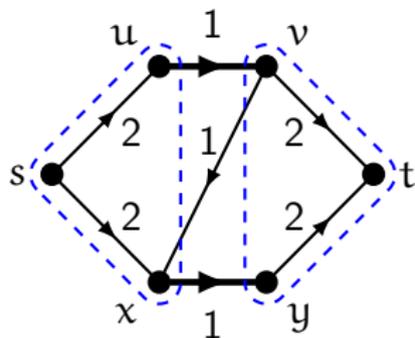
Por último, el flujo neto entrante en el sumidero t se incrementa en z :



Hemos probado que f' es un flujo factible tal que $\text{val}(f') = \text{val}(f) + z$. □

Más adelante vamos a describir un algoritmo para hallar un flujo máximo en una red dada. Pero primero buscaremos una manera sencilla de probar que un determinado flujo factible es un flujo máximo.

Flujo máximo



En nuestra red, las aristas que van de la mitad izquierda a la mitad derecha parecen formar un “cuello de botella”.

Tenemos una capacidad máxima de dos unidades de flujo por unidad de tiempo de la mitad izquierda hacia la mitad derecha de la red.

Esto nos da una **demostración** de que no puede haber flujos factibles con un valor mayor a 2.

Corte fuente/sumidero

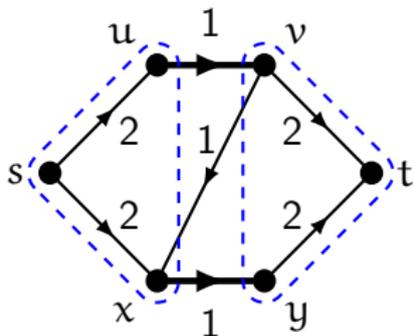
Corte fuente/sumidero

En una red, un **corte fuente/sumidero** $[S, T]$ consiste en todas las aristas que dejan un **conjunto fuente** S e ingresan en un **conjunto sumidero** T , donde $\{S, T\}$ es una partición del conjunto de vértices de la red tal que $s \in S$ and $t \in T$.

Capacidad de un corte

La **capacidad** del corte $[S, T]$, denotada $cap(S, T)$, es la suma de las capacidades de las aristas de $[S, T]$.

Notemos que las aristas de T a S no pertenecen al corte $[S, T]$ y por lo tanto no se toman en cuenta en la determinación de $cap(S, T)$.



Flujo neto de un conjunto de vértices

Dado un corte $[S, T]$, todo camino de s a t debe usar al menos una arista de $[S, T]$, así que intuitivamente el valor de un flujo factible debería estar acotado por $\text{cap}(S, T)$. Para precisar esta idea, extendemos la noción de flujo neto a un conjunto de vértices.

Flujo neto

Si U es un conjunto de vértices de una red, denotamos por $f^+(U)$ el flujo total de las aristas que dejan U y por $f^-(U)$ el flujo total de las aristas que ingresan en U .

El **flujo neto saliente de U** se define como $f^+(U) - f^-(U)$.

El **flujo neto entrante de U** se define como $f^-(U) - f^+(U)$.

Flujo neto

Lema

Si U es un conjunto de vértices de una red entonces el flujo neto saliente de U es la suma de los flujos netos salientes de los vértices de U . En particular, si f es un flujo factible y $[S, T]$ es un corte fuente/sumidero entonces el flujo neto saliente de S y el flujo neto entrante en T son iguales a $\text{val}(f)$, es decir,

$$f^+(S) - f^-(S) = f^-(T) - f^+(T) = \text{val}(f).$$

Demostración.

La primera afirmación del lema es que

$$f^+(U) - f^-(U) = \sum_{v \in U} (f^+(v) - f^-(v)).$$

Para ello vamos a analizar la contribución del flujo $f(xy)$ de cada arista xy a cada miembro de la fórmula. (...)

Flujo neto

$$f^+(\mathbf{U}) - f^-(\mathbf{U}) = \sum_{v \in \mathbf{U}} (f^+(v) - f^-(v)).$$

Demostración (cont.)

Si $x, y \in \mathbf{U}$ entonces $f(xy)$ no se suma ni se resta en el miembro izquierdo pero es sumado y restado una vez en el derecho. Si $x, y \in \bar{\mathbf{U}}$ entonces $f(xy)$ no se suma ni se resta en ninguno de los dos miembros. Y si $xy \in [\mathbf{U}, \bar{\mathbf{U}}]$ (resp. $[\bar{\mathbf{U}}, \mathbf{U}]$) entonces $f(xy)$ se suma (resp. resta) una vez en cada miembro. Sumando sobre todas las aristas xy de la red concluimos que vale la igualdad

$$f^+(\mathbf{U}) - f^-(\mathbf{U}) = \sum_{v \in \mathbf{U}} (f^+(v) - f^-(v)),$$

lo que prueba la primera afirmación.

(...)

Flujo neto

Demostración (cont.)

Si f es un flujo factible entonces $f^+(v) - f^-(v) = 0$ para todo $v \notin \{s, t\}$ y, por la igualdad que acabamos de probar, tenemos que:

$$f^+(S) - f^-(S) = f^+(s) - f^-(s) \text{ y}$$

$$f^-(T) - f^+(T) = -(f^+(T) - f^-(T)) = f^-(t) - f^+(t) = \text{val}(f).$$

Más aún, si V es el conjunto de todos los vértices de la red obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= f^+(V) - f^-(V) = \sum_{v \in V} (f^+(v) - f^-(v)) \\ &= (f^+(s) - f^-(s)) + (f^+(t) - f^-(t)) \\ &= (f^+(S) - f^-(S)) - (f^-(T) - f^+(T)). \end{aligned}$$

Concluimos entonces que $f^+(S) - f^-(S) = f^-(T) - f^+(T) = \text{val}(f)$ para todo flujo factible f y todo corte fuente/sumidero $[S, T]$. \square

Dualidad débil

Corolario (Dualidad débil)

Si f es un flujo factible de una red y $[S, T]$ es un corte fuente sumidero entonces

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}(S, T).$$

Demostración.

Por el lema, el valor de f es igual al flujo neto saliente de S . Luego,

$$\text{val}(f) = f^+(S) - f^-(S) \leq f^+(S),$$

ya que $f^-(S) \geq 0$. Como f es factible entonces

$$f^+(S) \leq \text{cap}(S, T).$$

Concluimos que $\text{val}(f) \leq \text{cap}(S, T)$. □

Entre los cortes fuente/sumidero $[S, T]$, aquellos con capacidad mínima nos ofrecen la cota superior más ajustada en el corolario.

Corte mínimo

Corte mínimo

Un **corte mínimo** de una red es un corte fuente/sumidero $[S, T]$ cuya capacidad es la mínima posible.

La desigualdad

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}(S, T)$$

nos dice que los problemas de flujo máximo y corte mínimo son duales en el sentido que ya discutimos. Recordemos una vez más que esto significa que si el valor de un determinado flujo factible coincide con la capacidad de un cierto corte fuente/sumidero entonces el flujo es máximo y el corte es mínimo.

Probaremos que vale la **dualidad fuerte**, es decir, que para toda red existe un flujo máximo cuyo valor coincide con la capacidad de un corte mínimo. La demostración será algorítmica y basada en caminos aumentantes.

Algoritmo de Ford y Fulkerson

El algoritmo de Ford y Fulkerson (1956) busca en cada iteración un camino aumentante. Si lo encuentra entonces incrementa el flujo a lo largo del camino aumentante. Si no lo encuentra entonces devuelve un corte cuya capacidad iguala el valor del flujo actual, lo que asegura la optimalidad tanto del flujo como del corte.

Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)

Entrada: Una red.

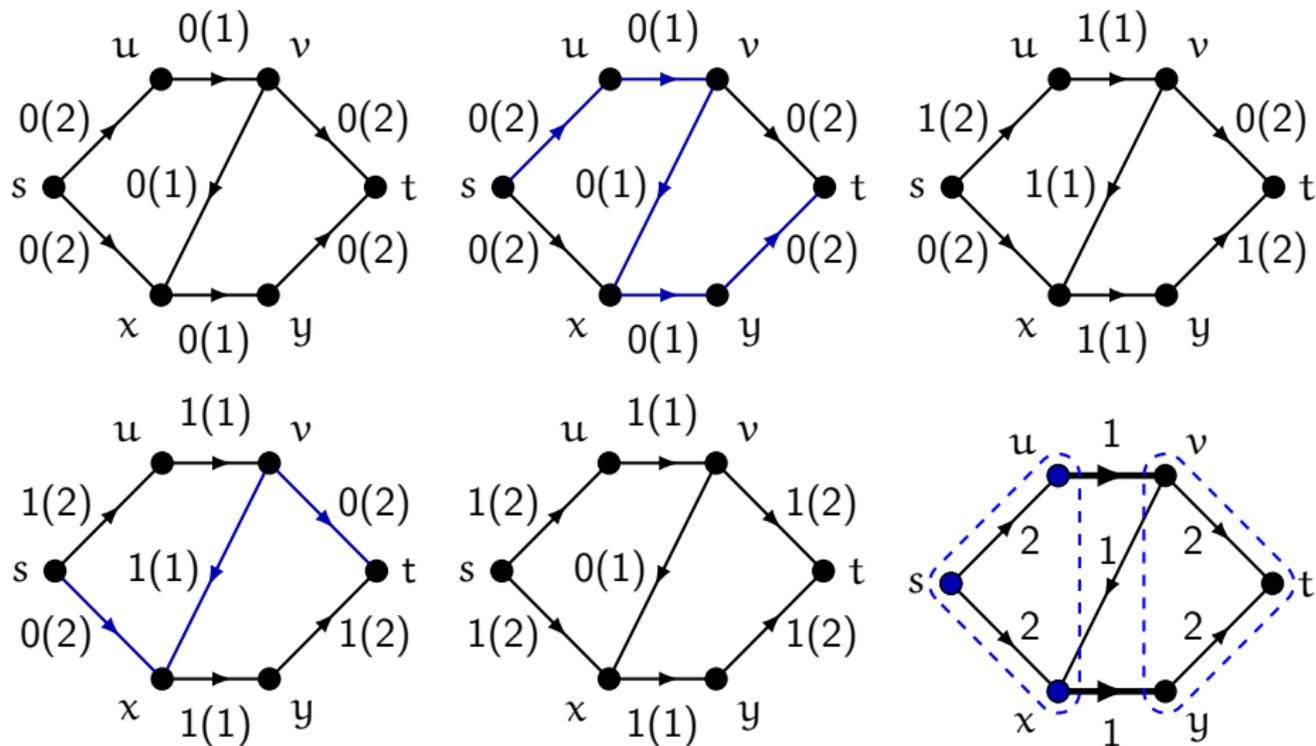
Inicialización: Sea f el flujo cero sobre la red.

Iteración: Mientras haya un camino f -aumentante P , cambiar f pasando $\epsilon(P)$ unidades adicionales de flujo a través de P .

Salida: El flujo f y el corte $[S, \bar{S}]$ donde S es el conjunto de vértices alcanzables desde la fuente por caminos con tolerancia positiva (respecto de f).

Algoritmo de Ford y Fulkerson

Ejemplo



Obtuvimos así un flujo con valor 2 y un corte con capacidad 2.

Teorema del flujo máximo y el corte mínimo

Teorema (Ford y Fulkerson, 1956)

Si las capacidades de una red son racionales, el valor máximo de un flujo factible es igual a la capacidad mínima de un corte fuente/sumidero.

Demostración.

Cuando las capacidades son racionales, cada vez que se encuentra un camino f -aumentante, el flujo se incrementa al menos $1/\alpha$ unidades donde α es al mínimo común múltiplo de los denominadores de las capacidades de las aristas de la red. Por lo tanto, luego de un número finito de aumentos, el valor del flujo no puede crecer más y el algoritmo termina.

Cuando el algoritmo se detiene devuelve un flujo factible f y un corte fuente/sumidero $[S, \bar{S}]$. Alcanzará con probar que el corte $[S, \bar{S}]$ tiene capacidad $\text{val}(f)$. (...)

Teorema del flujo máximo y el corte mínimo

Demostración (cont.)

Como los vértices de S son alcanzables desde la fuente por caminos de tolerancia positiva pero no así los vértices de \bar{S} entonces:

- 1 no existe ninguna arista de S a \bar{S} que no tenga su capacidad colmada por f ; y
- 2 ninguna arista de \bar{S} a S tiene flujo positivo en f .

Luego,

$$f^+(S) = \text{cap}(S, \bar{S}) \quad \text{y} \quad f^-(S) = 0.$$

Como f no admite caminos aumentantes entonces t no es alcanzable desde s por caminos de tolerancia positiva, es decir, $t \in \bar{S}$. Así $[S, \bar{S}]$ es un corte fuente/sumidero de la red. Y como el flujo neto saliente de cualquier conjunto fuente es $\text{val}(f)$, concluimos que:

$$\text{val}(f) = f^+(S) - f^-(S) = \text{cap}(S, \bar{S}) - 0 = \text{cap}(S, \bar{S}). \quad \square$$

Flujos enteros

Corolario (Teorema de integralidad)

Si todas las capacidades en una red son enteras entonces existe un flujo máximo que asigna un flujo entero a cada arista. Más aún, algún flujo máximo puede partitionarse en flujos de valor unitario a lo largo de caminos de la fuente al sumidero.

Demostración.

En cada iteración del algoritmo de Ford y Fulkerson, el valor absoluto del cambio de flujo sobre las aristas del camino aumentante es igual al flujo por una arista o a la diferencia entre la capacidad y el flujo por una arista. Como se comienza con el flujo cero y las capacidades son todas enteras, en todo momento el flujo se mantiene entero sobre todas las aristas durante toda la ejecución. (...)

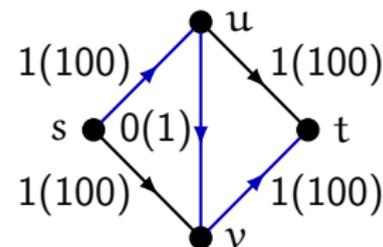
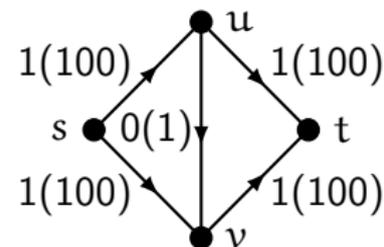
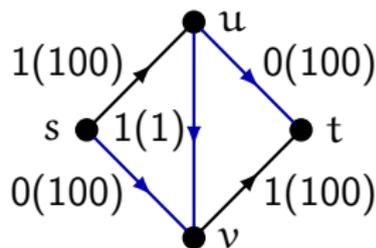
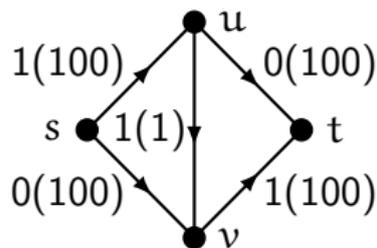
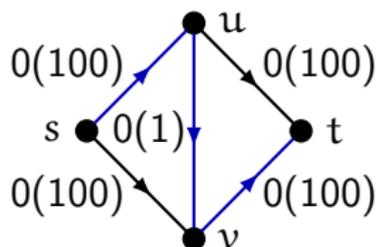
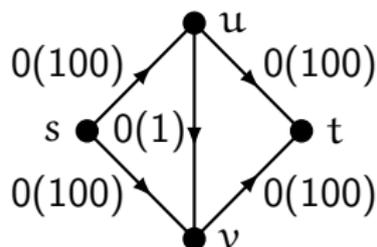
Flujos enteros

Demostración (cont.)

Consideremos un flujo máximo f que es entero sobre todas las aristas de la red. Podemos asumir que las aristas con flujo positivo en f forman un grafo acíclico. De lo contrario, reducimos el flujo a lo largo de las aristas de un tal ciclo, obteniendo un nuevo flujo entero y máximo. Y repetimos esta operación hasta que no queden más ciclos. Si, en cada vértice distinto de s y t , apareamos cada unidad de flujo entrante con una unidades de flujo saliente (digamos pintándolas con el mismo color), se obtienen entonces $\text{val}(f)$ caminos de s a t , cada uno de los cuales correspondiendo a una unidad de flujo. □

Algoritmo de Ford y Fulkerson

La convergencia puede ser (exponencialmente) lenta (en el tamaño de la entrada).



Red residual

Una forma de describir más explícitamente los caminos aumentantes es a través de la noción de red residual.

Red residual

Dada una red N con un flujo factible f , la red residual N_f tiene los mismo vértices y, para cada arista de uv de N , el digrafo N_f posee:

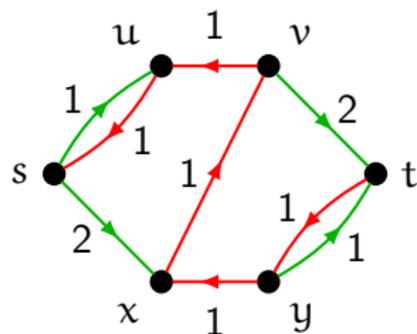
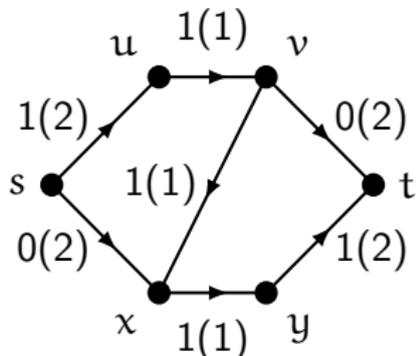
- ① una arista uv con peso $c(uv) - f(uv)$ si $f(uv) < c(uv)$; y
- ② una arista vu con peso $f(uv)$ si $f(uv) > 0$.

Las aristas del punto ① se llaman **aristas de avance**, las del punto ② se llaman **aristas de retroceso** y la red residual no tiene otras aristas que las que surgen de los puntos ① y ②.

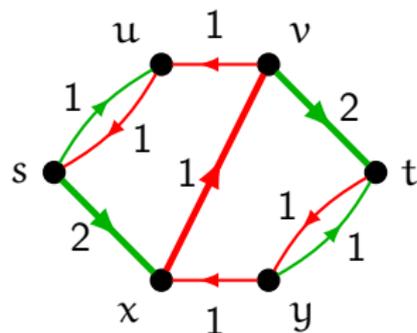
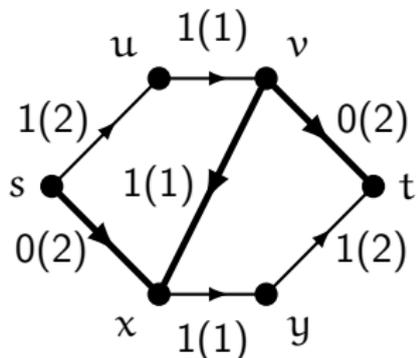
Notemos que la red residual N_f tiene a lo sumo una arista de avance y a lo sumo una arista de retroceso por cada arista de N .

Red residual y caminos aumentantes

Ejemplo (aristas de avance verdes, de retroceso rojas):

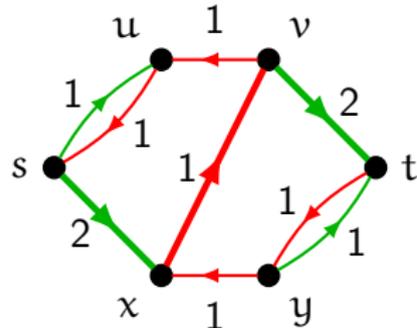
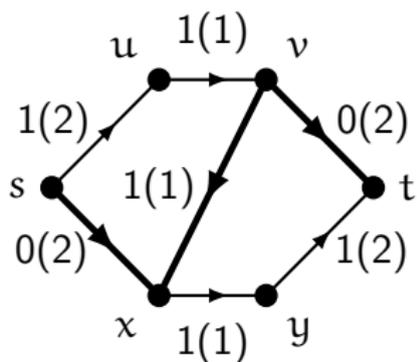


Claramente, un camino f -aumentante corresponde a un camino (dirigido) de s a t en N_f .



Red residual y caminos aumentantes

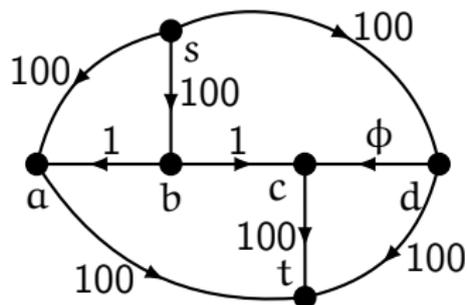
Más aún, en esta correspondencia, la tolerancia del camino f -aumentante coincide con el menor de los pesos de las aristas del correspondiente camino de s a t en N_f .



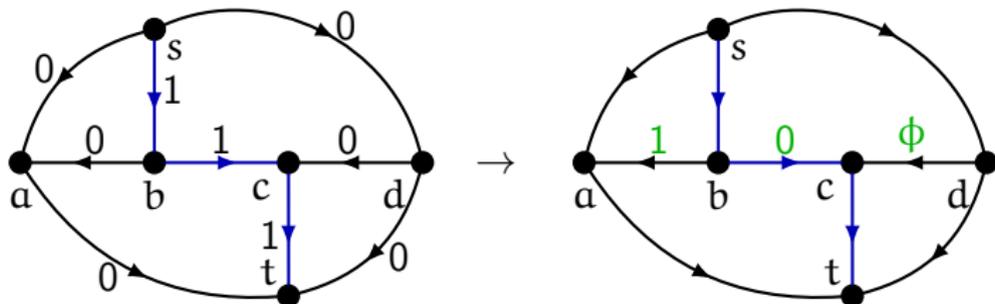
Llamaremos a los caminos de s a t en N_f , **caminos aumentantes en la red residual**.

Algoritmo de Ford y Fulkerson

Denotamos por ϕ la única solución positiva de la ecuación $1 - \phi = \phi^2$. Es decir, $\phi = (\sqrt{5} - 1)/2$ (inverso del número áureo). La siguiente red (Zwick, 1995) tiene un flujo de valor 201:

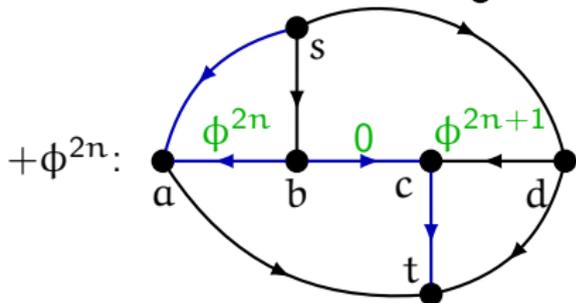
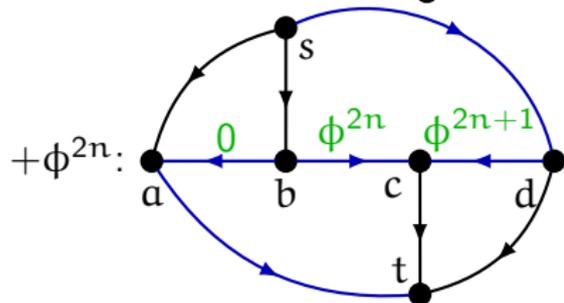
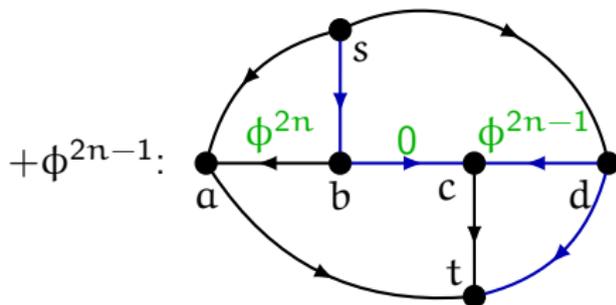
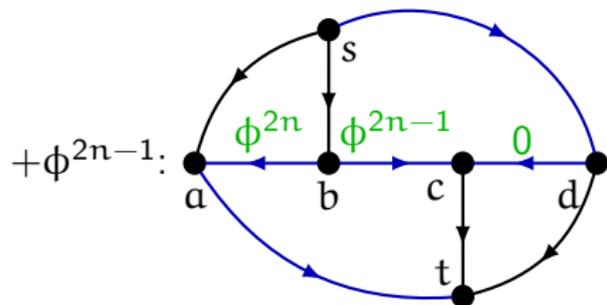
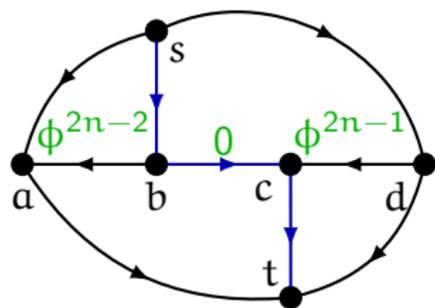
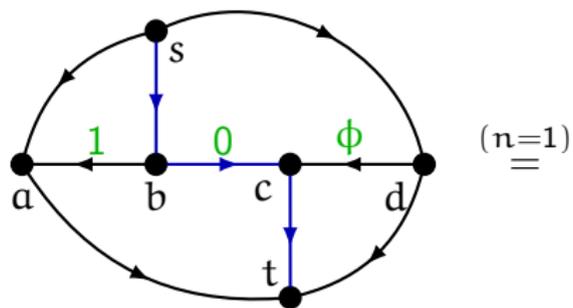


Supongamos que el primer aumento es:



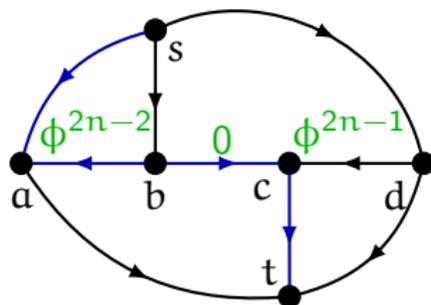
donde los valores en verde son capacidad residual.

Algoritmo de Ford y Fulkerson



Algoritmo de Ford y Fulkerson

Si $n \geq 1$, luego de $1 + 4(n - 1) = 4n - 3$ aumentos, se llega a:



El supremo de los valores de estos flujos cuando $n \rightarrow \infty$ es

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\phi^{2n-1} + \phi^{2n}) &= 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \\ &= 1 + \frac{2\phi}{1-\phi} \\ &= 1 + \frac{2}{\phi} = 1 + 2 \frac{(\sqrt{5}+1)}{2} = 2 + \sqrt{5} < 5. \end{aligned}$$

El algoritmo no termina y ni siquiera tiende al flujo máximo.

Algoritmo de Edmonds y Karp

Podemos lograr que el algoritmo termine incluso si la red tiene capacidades irracionales, eligiendo en cada iteración un camino aumentante de longitud mínima. El algoritmo de Edmonds y Karp es precisamente la variante del algoritmo de Ford y Fulkerson donde en cada iteración el camino aumentante se elige de longitud mínima. Edmonds y Karp (1972) señalan sobre esta regla que “is so simple that it is likely to be incorporated innocently into a computer implementation”.

Algoritmo de Edmonds y Karp (1972)

Entrada: Una red.

Inicialización: Inicialmente f es el flujo cero sobre la red.

Iteración: Mientras haya un camino f -aumentante, cambiar f pasando $\epsilon(P)$ unidades adicionales de flujo a través de **un camino f -aumentante de longitud mínima P** .

Salida: El flujo f y el corte $[S, \bar{S}]$ donde S es el conjunto de vértices alcanzables desde la fuente por caminos con tolerancia positiva (respecto de f).

Algoritmo de Edmonds y Karp

Notación

Dada una red N , un flujo factible f y un vértice v de N , denotamos por $\delta_f(s, v)$ la longitud mínima (medida como número de aristas) de un camino s a v en la red residual N_f .

Lema

En el algoritmo de Edmonds y Karp sobre una red con fuente s y sumidero t , para cada vértice $v \neq t$, las distancias $\delta_f(s, v)$ en las sucesivas iteraciones son no decrecientes.

Demostración.

Supongamos, por el absurdo, que el lema no vale. Sea f el flujo antes del primer aumento que provoca la reducción en la red residual de la distancia de s a algún vértice distinto de t . Sea f' el flujo inmediatamente después de dicho aumento. Sea v el vértice $v \neq t$ con $\delta_{f'}(s, v)$ mínimo tal que $\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)$. (...)

Algoritmo de Edmonds y Karp

Demostración (cont.)

Sea P un camino de s a v de longitud mínima en $N_{f'}$ y sea u el vértice inmediatamente anterior a v en P . En particular, existe una arista de u a v en $N_{f'}$ y

$$\delta_{f'}(s, u) = \delta_{f'}(s, v) - 1.$$

Más aún, por la minimalidad en la elección de v , sabemos que

$$\delta_f(s, u) \leq \delta_{f'}(s, u).$$

Afirmamos que no existe una arista de u a v en N_f . En efecto, si existiese una arista de u a v en N_f entonces

$$\delta_f(s, v) \leq \delta_f(s, u) + 1 \leq \delta_{f'}(s, u) + 1 = \delta_{f'}(s, v),$$

lo que contradiría la hipótesis $\delta_f(s, v) > \delta_{f'}(s, v)$. (...)

Algoritmo de Edmonds y Karp

Demostración (cont.)

Como no existe una arista de u a v en N_f pero existe una arista de u a v en $N_{f'}$ entonces al pasar el algoritmo de f a f' incrementó el flujo de v a u (ya sea incrementando el flujo en una arista de v a u o decrementando el flujo en una arista de u a v). Como el algoritmo de Edmonds y Karp aumenta flujo a través de caminos de longitud mínima, una arista de v a u es la última arista en un camino de longitud mínima de s a u en la red residual. Entonces

$$\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) - 1 \leq \delta_{f'}(s, u) - 1 = \delta_{f'}(s, v) - 2,$$

lo que contradice nuestra hipótesis $\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)$. Esta contradicción muestra que el lema es verdadero. □

Algoritmo de Edmonds y Karp

Teorema (Edmonds y Karp, 1972)

El número total de aumentos que realiza el algoritmo de Edmonds y Karp es $O(mn)$ donde n y m son el número de vértices y de aristas de la red, respectivamente.

Demostración.

Decimos que una arista uv de un camino aumentante P en la red residual es **crítica** si la tolerancia de P coincide con el peso de uv . Luego de haber aumentado el flujo a través de un camino aumentante, toda arista crítica del mismo desaparece de la red residual. Notemos que cada camino aumentante tiene al menos una arista crítica. Mostraremos que cada arista de la red residual puede volverse crítica a lo sumo $n/2$ veces durante la ejecución del algoritmo.

Sea e una arista de red original y e' una de las aristas generadas por e en la red residual. Sean u la cola y v la cabeza de e' . Como los caminos aumentantes se eligen de longitud mínima, cuando e' es crítica: $\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) + 1$. (...)

Algoritmo de Edmonds y Karp

$$\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) + 1.$$

Demostración (cont.)

Una vez que se aumenta el flujo, la arista e' desaparece de la red residual. Y para volver a aparecer necesita que e'' , la otra arista de la red residual generada por la misma arista e , pertenezca a un camino aumentante en la red residual. Si f' es el flujo cuando esto ocurre, entonces, como e'' tiene cola v y cabeza u :

$$\delta_{f'}(s, u) = \delta_{f'}(s, v) + 1.$$

Como por el lema anterior $\delta_{f'}(s, v) \geq \delta_f(s, v)$, tenemos que

$$\delta_{f'}(s, u) = \delta_{f'}(s, v) + 1 \geq \delta_f(s, v) + 1 = \delta_f(s, u) + 2.$$

En consecuencia, desde que una arista e' se vuelve crítica hasta que vuelve a ser crítica, la distancia de s a u se incrementa en al menos 2 unidades. (...)

Algoritmo de Edmonds y Karp

Demostración (cont.)

La distancia de s a u es inicialmente al menos 0. Cuando e' es crítica, e' pertenece a un camino aumentante y por lo tanto $u \neq t$. Luego, cuando e' es crítica, ni s ni u ni t se encuentran entre los vértices internos de un camino mínimo entre s y u en la red residual. Esto prueba que $\delta_f(s, u) \leq n - 2$ cuando e' es crítica. Por lo tanto, luego de que e' se vuelve crítica por primera vez, puede volverse crítica a lo sumo $(n - 2)/2 = n/2 - 1$ veces más, lo que nos da un total de $n/2$ veces.

Como las m aristas de la red generan a lo sumo $2m$ aristas en la red residual, el número total de aristas críticas durante la ejecución del algoritmo de Edmonds y Karp es $O(mn)$. Como cada camino aumentante tiene al menos una arista crítica, esto prueba la validez del teorema. □

Algoritmo de camino aumentante más corto

Algoritmo de camino aumentante más corto o corte mínimo

Entrada: Un flujo factible f en una red.

Idea: Encontrar los nodos alcanzables desde s a través de caminos con tolerancia positiva. Si se alcanza t entonces se está frente a un camino aumentante. Durante la ejecución R contiene los vértices “a explorar” y S los vértices “explorados”.

Inicialización: R es una cola cuyo único elemento es s y $S = \emptyset$.

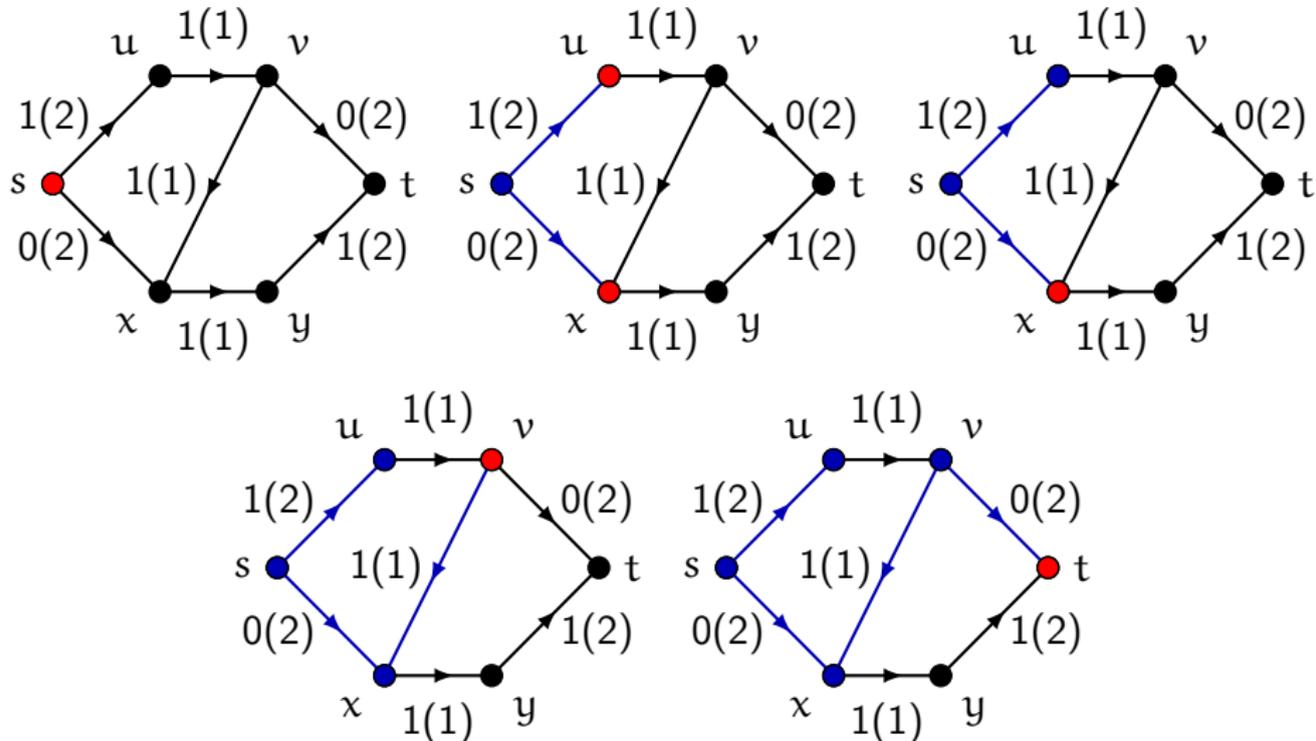
Iteración: Mientras R no esté vacía, sea v su primer elemento.

- ▶ Para cada arista saliente vw tal que $f(vw) < c(vw)$ y $w \notin R \cup S$, encolar w en R .
- ▶ Para cada arista entrante uv tal que $f(uv) > 0$ y $u \notin R \cup S$, encolar u en R .

En ambos casos recordar que el vértice fue alcanzado desde v . Si t ingresa en R , reconstruir el camino desde s por el que se alcanzó t y devolverlo como un camino f -aumentante y terminar. Exploradas todas las aristas incidentes en v , quitar v de R y agregarlo a S . Si R queda vacía, devolver el corte $[S, \bar{S}]$ y terminar.

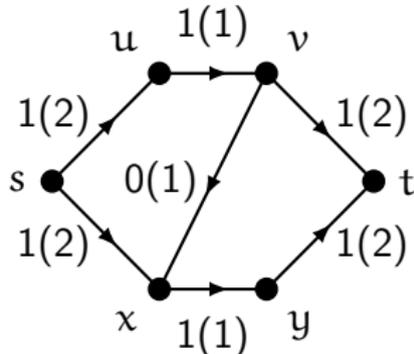
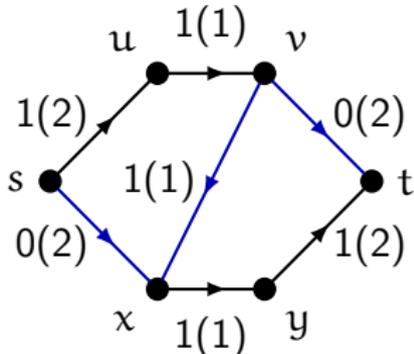
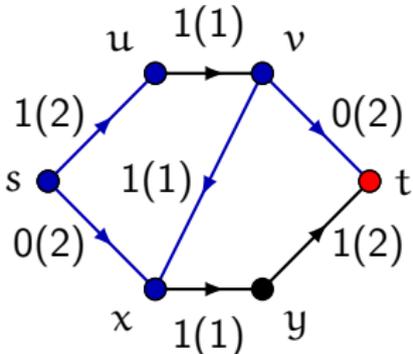
Ejemplo

En este ejemplo, los vértices rojos son los alcanzados, los azules los explorados y las aristas azules unen cada vértice alcanzable con su predecesor en un camino de tolerancia positiva desde s .

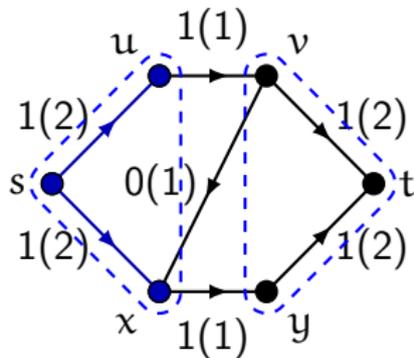
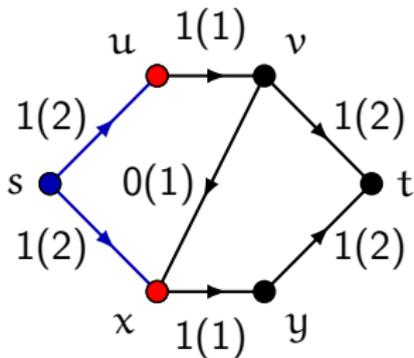
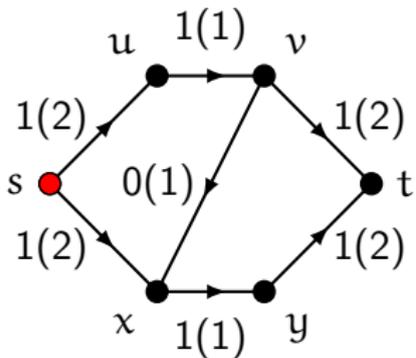


Ejemplo

Incrementamos el flujo tanto como la tolerancia del camino a t :



Si aplicamos nuevamente el algoritmo obtenemos:



La salida es un flujo con valor 2 y un corte con capacidad 2.

Algoritmo de Edmonds y Karp

Como cada iteración del algoritmo de Edmonds y Karp toma tiempo $O(m)$ y el número de iteraciones es $O(mn)$ entonces su tiempo de ejecución es $O(m^2n)$.

Existen algoritmos de mejor complejidad temporal, por ejemplo, el algoritmo **relabel-to-front** con tiempo de ejecución $O(n^3)$.

Teoremas de Menger para digrafos

Sea D un digrafo y sean x e y dos vértices distintos de D .

- ▶ Consideramos a D como una red con fuente x , sumidero y y capacidad 1 en cada arista.
- ▶ Por el teorema de flujo máximo y corte mínimo, existe un flujo f y un corte fuente/sumidero $[S, T]$ tales que $\text{val}(f) = \text{cap}(S, T)$.
- ▶ Esto nos da $\text{val}(f)$ caminos de la fuente al sumidero disjuntos por aristas, lo que implica que $\lambda'_D(x, y) \geq \text{val}(f)$.
- ▶ A su vez, las remoción de las aristas $[S, T]$ hacen que x no sea alcanzable desde y , lo que implica que $\kappa'_D(x, y) \leq \text{cap}(S, T)$.
- ▶ Como vale la dualidad $\kappa'_D(x, y) \geq \lambda'_D(x, y)$, entonces

$$\kappa'_D(x, y) = \lambda'_D(x, y).$$

Teoremas de Menger para digrafos

Sea D un digrafo y sean x e y dos vértices no adyacentes de D .

- ▶ Para obtener una red que modele el problema de los caminos internamente disjuntos, reemplazamos cada vértice v por dos vértices v^- y v^+ que inciden solo en las aristas que ingresan y salen de v , respectivamente, y agregamos una arista de v^- a v^+ con capacidad 1.
- ▶ Damos a las demás aristas capacidad suficientemente grande, de manera de asegurarnos que un corte mínimo solo contenga aristas del tipo v^-v^+ .
- ▶ Un flujo máximo de x^+ a y^- de valor k nos da un conjunto de k caminos internamente disjuntos de x a y .
- ▶ Un corte mínimo de x^+ a y^- de valor k nos da un conjunto de vértices cuya remoción hace que y no sea alcanzable desde x .
- ▶ Por la dualidad,

$$\kappa_D(x, y) = \lambda_D(x, y).$$

Teoremas de Menger para grafos

- ▶ Los teoremas de Menger para grafos se pueden obtener también a partir del teorema de flujo máximo y corte mínimo.
- ▶ Para el teorema sobre caminos disjuntos por aristas en un grafo G , debemos formar una red cambiando cada arista de G por dos aristas dirigidas en sentidos opuestos. Si un flujo máximo utiliza dos aristas en sentidos opuestos es como si no utilizara ninguna de ellas.
- ▶ Para el teorema sobre caminos internamente disjuntos en un grafo G , debemos además cambiar cada vértice v por dos vértices v^- y v^+ como en la construcción anterior.