Nociones básicas

Martín D. Safe

Instituto de Cálculo, Universidad de Buenos Aires

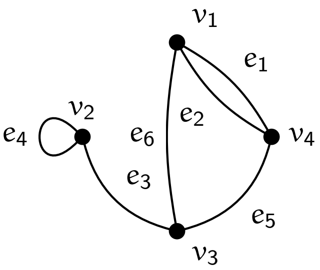
Tópicos Fundamentales en Teoría de Grafos
2.º semestre 2018

Grafos

Grafo

Un grafo es una terna formada por:

- un conjunto $V(G)$ de vértices;
- un conjunto $E(G)$ de aristas; y
- una correspondencia que asigna a cada arista un par desordenado de vértices (posiblemente iguales) llamados sus extremos.

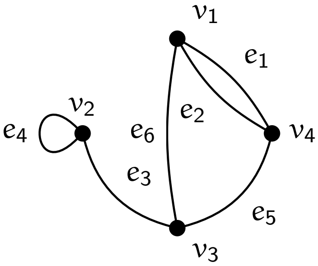


Los nombres vértice y arista provienen de la geometría de poliedros.

Grafos

Bucles y aristas múltiples

Un bucle es una arista cuyos extremos coinciden. Las aristas múltiples son aquellas que tienen el mismo par de extremos.



Adyacencia. Vecindad. Incidencia

Si u y v son los extremos de una arista e se dice que:

- u y v son adyacentes o vecinos;
- e es incidente en u y en v;
- e une u con v.

Grafos simples

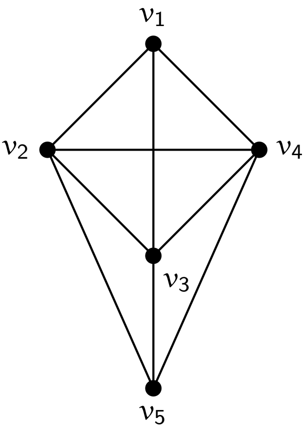
Grafo simple

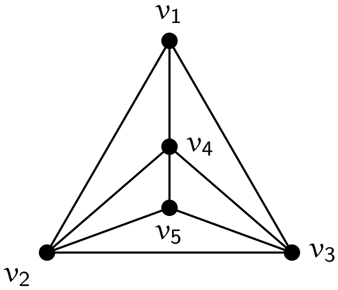
Un grafo simple es un grafo sin bucles ni aristas múltiples.

Consideremos un grafo simple G.

- Podemos especificar G mediante su conjunto de vértices y su conjunto de aristas, donde las aristas se pueden considerar como pares desordenados.
- Es decir, para grafos simples vamos a ignorar la formalidad de la correspondencia que asigna los extremos a las aristas. Consideramos cada arista como igual al par desordenado formado por sus extremos.
- Si u y v son vértices de G, escribiremos $e = uv$ (o $e = vu$) para indicar que e es *la* arista con extremos u y v.
- La mayor parte del curso tratará sobre grafos simples.

Grafos simples





Son dos representaciones distintas del mismo grafo simple.

Grafo nulo y grafo trivial

Grafo nulo

El grafo nulo es aquel sin vértices ni aristas.

Observación

Formular todos las afirmaciones (lemas, teoremas, etc.) de manera que valgan para el grafo nulo es una distracción innecesaria. Por lo tanto, debe entenderse que nuestras afirmaciones son verdaderas, salvo quizá para el grafo nulo.

Grafo trivial

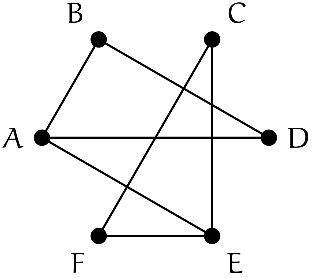
Un grafo es trivial si tiene un único vértice y no tiene aristas.

Grafos como modelos

Problema

En un grupo de 6 o más personas, ¿es cierto que siempre hay 3 personas que se conocen entre sí de a pares o 3 personas que no se conocen entre sí de a pares?

Consideremos la relación "conoce a" como un grafo: sus vértices son las personas y con una arista entre dos personas si y sólo si se conocen.

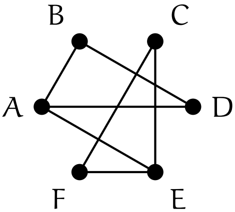


Complemento de un grafo simple

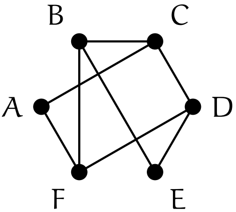
Complemento de un grafo simple

El complemento de un grafo simple G, que se denota $\overline{G}$, es el grafo simple con los mismos vértices que G y cuyo conjunto de aristas es

$$\{uv : u, v \in V(G), u \neq v \text{ y } uv \notin E(G)\}$$



G



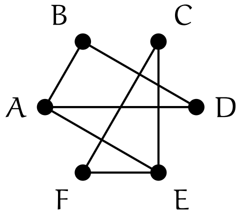
$\overline{G}$

El complemento del grafo de la relación "conoce a" es el grafo de la relación "no conoce a".

Cliques y conjuntos independientes

Clique y conjunto independiente

Una clique es un conjunto de vértices adyacentes de a pares.
Un conjunto independiente (o conjunto estable) es un conjunto de vértices sin aristas entre ningún par de ellos (ni siquiera bucles).



En este ejemplo, $\{C, F, E\}$ y $\{B, E\}$ son una clique y un conjunto independiente máximos (es decir, de cardinalidad máxima).
Los conjuntos $\{A, E\}$ y $\{B, E\}$ son una clique y un conjunto independiente maximales (es decir, no contenidos ningún otro).

Claramente, las cliques de un grafo son exactamente los conjuntos independientes de su complemento.

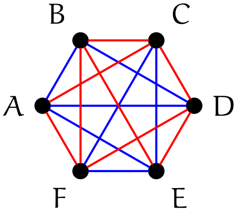
Cliques y conjuntos independientes

Problema (reformulado)

¿Todo grafo con 6 vértices tiene una clique de tamaño 3 o un conjunto independiente de tamaño 3?

Solución.

Podemos pensar en un grafo simple con 6 vértices que representan las personas y las 15 aristas posibles, todas ellas coloreadas usando dos colores: un color cuando las personas se conocen y otro color cuando las personas no se conocen.

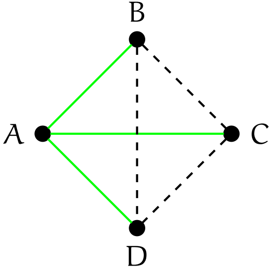


Vamos a probar que hay algún triángulo monocromático. (...)

Cliques y conjuntos independientes

Demostración (cont.)

Sea A un vértice cualquiera del grafo. De las 5 aristas que inciden en A, al menos 3 de ellas son del mismo color. Sean B, C y D tres vértices tales que AB, AC y AD tienen el mismo color.

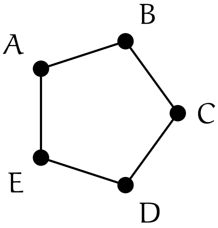


Si alguna de las aristas BC, BD y CD fuera de ese mismo color, se forma un triángulo monocromático. Si, por el contrario, BC, BD y CD fueran del color opuesto entonces BCD es monocromático. Concluimos que en todos los casos hay un triángulo monocromático, como queríamos. □

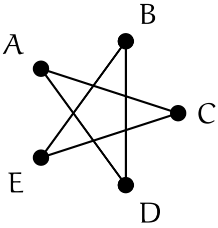
Cliques y conjuntos independientes

Observaciones

- ¿Cinco personas son suficientes para garantizar que haya 3 que se conocen de a pares o 3 que no se conocen de a pares? No.



G



$\overline{G}$

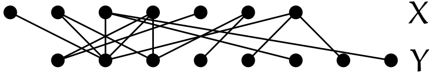
- En general, la Teoría de Ramsey asegura que dados naturales $n_1, \ldots, n_k$, existe un natural $R(n_1, \ldots, n_k)$ tal que todo coloreo de las aristas de una clique de tamaño $R(n_1, \ldots, n_k)$ con los colores $1, 2, \ldots, k$ contiene, para algún i, una clique de tamaño n_i con todas sus aristas coloreadas con color i. Por ejemplo, $R(3, 3) = 6$.

Problemas de asignación y grafos

Consideraremos la situación en la cual se tiene un conjunto X de cursos y un conjunto Y de profesores. Cada profesor puede dictar a lo sumo un curso y cada curso requiere de un solo profesor para dictarse. Se conoce la lista de cursos que puede dictar cada profesor.

¿Es posible dictar todos los cursos? Más en general, ¿cuál es la máxima cantidad de cursos que se puede dictar?

Podemos representar la situación a través de un grafo que tiene un vértice por cada elemento de X y un vértice por cada elemento de Y y una arista xy entre un $x \in X$ y un $y \in Y$ si y sólo si el curso x puede ser dictado por el profesor y.



¿Cómo se formularía el problema en términos del grafo? El máximo número de cursos que puede dictarse es el tamaño máximo de un conjunto de aristas que no comparten vértices de a pares. En este ejemplo, se puede probar que es 6.

Grafos bipartitos y matchings

Grafo bipartito

Un grafo bipartito es un grafo tal que su conjunto de vértices puede particionarse en dos conjuntos independientes (posiblemente vacíos).
Si $\{X, Y\}$ es una partición del conjunto de vértices de un grafo bipartito G en dos conjuntos independientes (posiblemente vacíos) entonces $\{X, Y\}$ se llama una bipartición de G.

Matching

Un matching es un conjunto de aristas que de a pares no comparten vértices.

El problema de asignación de profesores a cursos es un problema de matching máximo en grafos bipartitos.

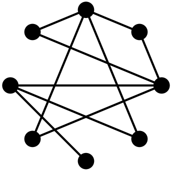
En este curso veremos un algoritm de Kuhn y Munkres, llamado algoritmo húngaro, para resolver eficientemente el problema del matching (de peso) máximo en grafos bipartitos.

Planificación y coloreo de grafos

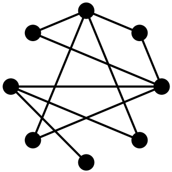
Supongamos que se nos pide planificar las reuniones de las comisiones del Consejo Superior, de una hora cada una. Dos comisiones no pueden reunirse en el mismo horario si comparten al menos un miembro.

¿Cuál es la mínima cantidad de períodos de tiempo (de una hora cada uno) necesarios para llevar a cabo las reuniones de todas las comisiones?

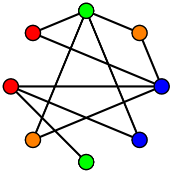
Consideramos el grafo que tiene un vértice por cada comisión y una arista entre dos vértices si y sólo si las correspondientes comisiones comparten al menos un miembro.



Planificación y coloreo de grafos



Debemos asignar una etiqueta (que indica un período de tiempo) a cada vértice de manera que vértices adyacentes reciben etiquetas distintas.
Como el significado de estas etiquetas es cualitativo, se las denomina colores (y gráficamente se utilizan muchas veces colores).
El siguiente ejemplo muestra que 4 períodos de una hora cada uno son suficientes para que se reúnan todas las comisiones:

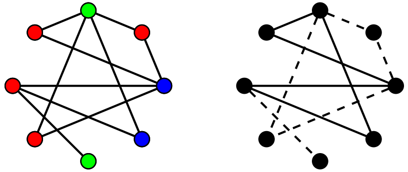


Número cromático

Número cromático

El número cromático de un grafo G, denotado $\chi(G)$, es el número mínimo de colores necesarios para etiquetar los vértices de G de manera que vértices adyacentes reciban colores distintos. Un tal etiquetado se llama un coloreo propio.

En nuestro caso, $\chi = 3$, ya que podemos colorear el grafo propiamente con 3 colores:



y las aristas continuas de la figura de la derecha corresponden a un ciclo impar, lo que muestra que 2 colores no son suficientes. Concluimos que 3 es el mínimo número de períodos de una hora que se necesitan para que se reúnan todas las comisiones.

Grafos k-partitos

La siguiente definición generaliza la noción de grafo bipartito.

Grafo k-partito

Un grafo es k-partito si su conjunto de vértices se puede particionar en k conjuntos independientes (posiblemente vacíos).

Observaciones

- Si G es k-partito entonces G es $(k+1)$-partito.
- Como los vértices de un mismo color en un coloreo propio forman un conjunto independiente, el número cromático es la mínima cantidad de conjuntos independientes necesarios para particionar el conjunto de vértices.
  Es decir, si G es un grafo, $\chi(G)$ es el mínimo k tal que G es k-partito.

Mapas y coloreo

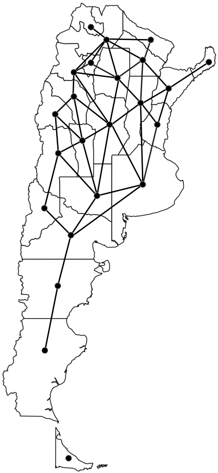
Problema de los cuatro colores

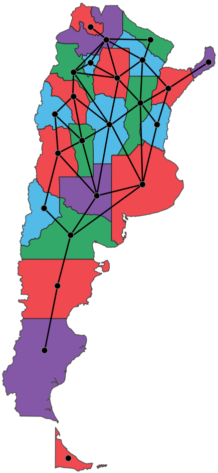
¿Podemos colorear las regiones conexas de todo mapa usando a lo sumo cuatro colores de manera que las regiones vecinas (en más de un punto) tengan diferentes colores?

- En octubre de 1852, Augustus De Morgan propuso este problema en una carta a Sir William Hamilton.
- El problema había sido planteado a De Morgan por Frederick Guthrie, a quien había sido planteado por su hermano Francis.
- Cayley anunció el problema a la London Mathematical Society en 1878 y Kempe en 1879 dio la primera "demostración".
- En 1890, Heawood encontró un error en la demostración de Kempe pero mostró que 5 colores alcanzan.
- La primera demostración es de Appel y Haken (y Koch) (1977 y 1986) requiriendo 1000 horas de cómputo de su época.
- Robertson, Sanders, Seymour y Thomas (1997) simplificaron la demostración pero aún requirió unas tres horas de verificación con una computadora de la época.

Mapas y coloreo

Definimos el grafo con un vértice en cada región y con dos vértices unidos por una arista si las regiones son vecinas.





¿Cuántos colores se necesitan para colorear este mapa? 4.

Mapas y coloreo

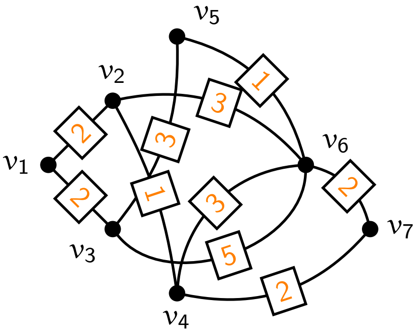
¿Qué tienen de particular los grafos resultantes que hacen que se los pueda colorear propiamente con a lo sumo 4 colores?

Lo particular es que estos grafos son planares, es decir, se pueden dibujar en el plano sin que las aristas se intersequen (salvo, claro, en los vértices).

En este curso veremos una caracterización de los grafos planares (Teorema de Kuratowski) y la demostración de Heawood (que utiliza la idea de cadenas de Kempe) para probar que 5 colores son suficientes.

Caminos y rutas

Podemos modelar una red de rutas o conexiones usando un grafo con las aristas representando los segmentos de ruta entre las intersecciones. Podemos asignar pesos a las aristas que representen las distancias, los tiempos de viajes u otros costos (peajes, etc.).

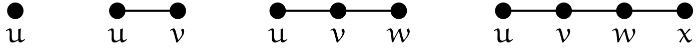


Hay algoritmos que computan un camino mínimo (en función de los pesos dados) de un vértice a otro en forma eficiente. Veremos uno de tales algoritmos: el algoritmo de Dijkstra (1959).

Recorridos en grafos

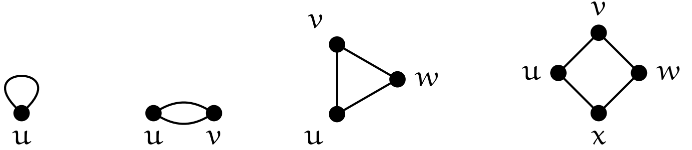
Caminos y ciclos

Un camino es un grafo simple cuyos vértices pueden ordenarse linealmente de forma tal que dos vértices son adyacentes si y sólo si son consecutivos en ese orden.



Los extremos de un camino son los vértices incidentes en a lo suma una arista. Los demás vértices del camino se llaman interiores.

Un ciclo es un grafo con igual número de vértices y aristas y cuyos vértices pueden ordenarse formando un círculo de tal modo que dos vértices son adyacentes si y sólo si son consecutivos en el círculo.



Caminos y ciclos en un grafo

Cuando estudiamos maneras de recorrer los vértices de un grafo pensamos en caminos y ciclos contenidos en el grafo. Esto motiva la definición de subgrafo.

Subgrafo

Un subgrafo de un grafo G es un grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ y los extremos de las aristas de H son los mismos en H que en G. En dicho caso diremos que G contiene H y notaremos $H \subseteq G$.

Caminos y ciclos en grafos

Un camino o ciclo en un grafo es un camino o un ciclo contenido en el grafo.

Esto nos permite introducir la noción de conexidad.

Conexidad

Un grafo es conexo si contiene un camino con extremos u y v para todo par de vértices u y v del grafo.

Matrices e isomorfismo

¿Cómo se especifica un grafo? De acuerdo a la definición, mediante un listado de sus vértices y sus aristas (con sus extremos). Hay también otras representaciones que se utilizan.

Matrices de adyacencia e incidencia

Sea G un grafo sin bucles (potencialmente con aristas múltiples) con conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y conjunto de aristas $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$.

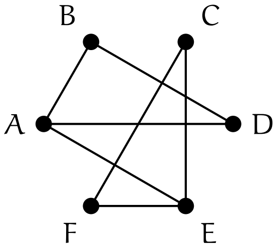
- Una matriz de adyacencia de G, que denotamos $A(G)$, es la matriz $n \times n$ cuyas entrada a_{ij} es el número de aristas de G cuyos extremos son v_i y v_j.
- Una matriz de incidencia de G, que denotemos $M(G)$, es la matrix $n \times m$ cuya entrada m_{ij} es 1 si y sólo si v_i es un extremo de e_j, y es 0 en caso contrario.

Grado de un vértice

Si G es un grafo sin bucles y v es un vértice de G, el grado de v en G es el número de aristas de G incidentes en v.

Matrices de adyacencia e incidencia

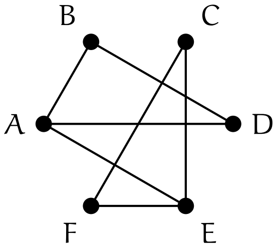
Consideramos nuevamente el grafo G de personas que se conocen.



¿Cuál es la matriz de adyacencia que corresponde al ordenamiento A, B, C, D, E, F de sus vértices?

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices de adyacencia e incidencia



¿Cuál es la matriz de incidencia correspondiente al ordenamiento A, B, C, D, E, F de sus vértices y al ordenamiento lexicográfico de sus aristas (es decir, $AB, AD, AE, BD, CE, CF, EF$)?

$$M(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices de adyacencia e incidencia

Observaciones

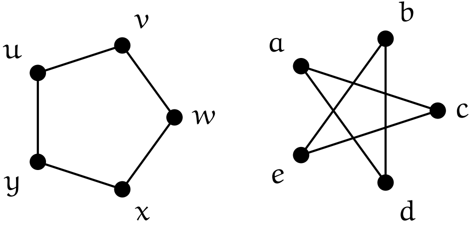
- Cada matriz de adyacencia queda determinada a partir de un ordenamiento de los vértices.
- Por definición, toda matriz de adyacencia es simétrica y tiene ceros en la diagonal.
- Las matrices de adyacencia de un grafo simple tiene entradas 0 y 1.
- Cada matriz de incidencia queda determinada por un ordenamiento de los vértices y un ordenamiento de las aristas.
- El grado de un vértice es igual a la suma de la fila correspondiente a él, tanto en las matrices de adyacencia como en las matrices de incidencia.

Isomorfismo

Vamos a estudiar nociones y propiedades estructurales, es decir, que no dependan de los nombres que tienen los vértices. Por ejemplo, el número cromático o la conexidad. El estudio de grafos desde esta perspectiva se conoce como teoría estructural de grafos.

Isomorfismo de grafos simples

Un isomorfismo entre dos grafos simples G y H es una biyección $f : V(G) \to V(H)$ tal que $uv \in E(G)$ si y sólo si $f(u)f(v) \in E(G)$. Si existe tal f se dice que G es isomorfo a H y escribimos $G \cong H$.



¿Son grafos isomorfos? Sí. Un isomorfismo entre ellos es la función f tal que $f(u) = a$, $f(v) = c$, $f(w) = e$, $f(x) = b$ y $f(y) = d$.

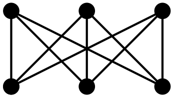
Isomorfismo

Observaciones

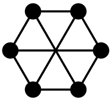
- Solo nos ocuparemos del isomorfismo de grafos simples. (La definicion se extiende a grafos en general de manera natural.)
- El isomorfismo de grafos es claramente una relación de equivalencia sobre cualquier conjunto de grafos.
- Para probar que dos grafos son isomorfos alcanza con dar un isomorfismo.
- Para probar que dos grafos no son isomorfos alcanza con mostrar que existe alguna propiedad estructural (es decir, que se preserva por isomorfismos) que verifica uno de los grafos y el otro no.

Isomorfismo

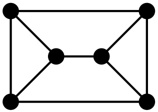
¿Cuáles de los siguientes grafos son isomorfos entre sí?



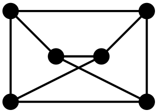
G_1



G_2



G_3



G_4

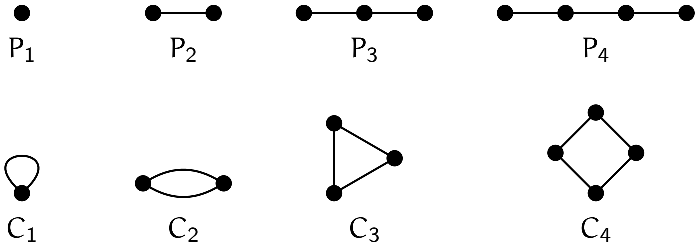
Los grafos G_1, G_2 y G_4 son isomorfos. El grafo G_3 no es isomorfo a ellos.

Grafos no etiquetados

Como el enfoque es estructural, en adelante dos grafos isomorfos serán indistinguibles para nosotros.
Informalmente, se utiliza la expresión grafo no etiquetado para referirse indistintamente a un grafo o cualquiera de sus grafos isomorfos.

Caminos y ciclos

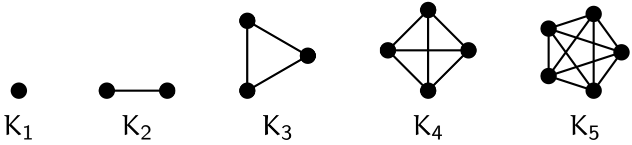
Para cada natural n, denotemos por P_n el camino (no etiquetado) de n vértices y por C_n el ciclo (no etiquetado) de n vértices.



Grafo completo

Grafo completo

Un grafo completo es un grafo simple cuyos vértices son adyacentes de a pares. Para cada natural n, denotaremos por K_n el grafo completo de n vértices. El grafo K_3 se llama triángulo.



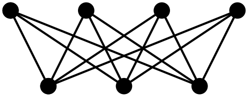
Observación importante

Definimos un grafo completo como un grafo cuyos vértices son adyacentes de a pares y una clique como un conjunto de vértices adyacentes de a pares. En algunos textos (especialmente los más antiguos) se puede encontrar estos términos usados al revés o como intercambiables.

Grafo bipartito completo

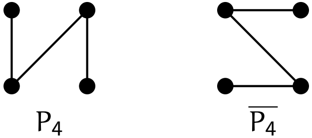
Grafo bipartito completo

Un grafo bipartito completo es un grafo bipartito simple que admite una partición de sus vértices en dos conjuntos independientes tales que dos vértices son adyacentes si y sólo si pertenecen a distintos conjunto de la partición. Se denota por $K_{r,s}$ un grafo bipartito completo donde los conjuntos de la partición tienen r y s vértices.



$K_{4,3}$

Grafos autocomplementarios



Tenemos que $P_4 \cong \overline{P_4}$ pues ambos son caminos de cuatro vértices.

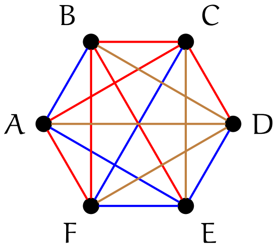
Grafos autocomplementarios

Un grafo simple es autocomplementario si es isomorfo a su complemento.

Descomposición

Descomposición

Una descomposición de un grafo es una lista de subgrafos tal que cada arista del grafo pertenece a exactamente uno de los subgrafos de la lista.

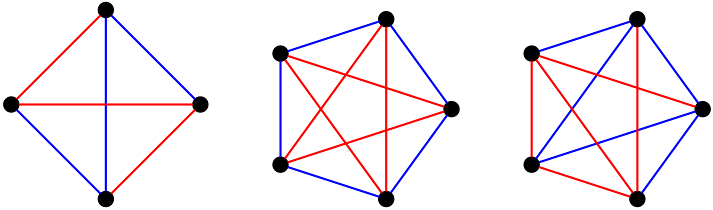


En este ejemplo, el grafo se decompone en tres grafos: uno formado las aristas rojas, otro formado por las aristas azules y otro formado por las aristas marrones (los tres con conjunto de vértices $\{A, B, C, D, E, F\}$).

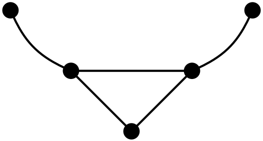
Descomposición y autocomplementariedad

Observación

Un grafo H de n vértices es autocomplementario si y sólo si K_n se descompone en dos copias de H.



El grafo autocomplementario al que corresponde la última descomposición se conoce como bull.



Grados y lema del apretón de manos

Completamos la definición de grado que habíamos visto anteriormente solo para grafos sin bucles.

Grado. Grado máximo. Grado mínimo. Grafo regular

- El grado de un vértice v en un grafo G, que se denota $d_G(v)$ o simpemente $d(v)$, es el número de aristas de G incidentes en v, con la excepción que cada bucle se cuenta dos veces.
- El grado máximo entre los vértices de un grafo G se denota por $\Delta(G)$.
- El grado mínimo entre los vértices de un grafo G se denota por $\delta(G)$.
- Un grafo es regular si todos los vértices tienen el mismo grado (es decir, si $\delta(G) = \Delta(G)$).
- Un grafo es k-regular si todos los vértices tienen grado k.

Lema del apretón de manos

Lema del apretón de manos

Si G es un grafo entonces la suma de los grados de todos los vértices es igual al doble del número de aristas. En símbolos:

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|.$$

Demostración.

Cada arista contribuye en 1 al grado de cada uno de sus extremos, a no ser que sea un bucle, en cuyo caso contribuye en 2 al grado de su único extremo. Por lo tanto, cada arista contribuye en 2 a la suma de los grados de todos los vértices. □

Lema del apretón de manos

Corolario

Todo grafo tiene un número par de vértices de grado impar.

Demostración.

Sea G un grafo. Claramente, $\sum_{v\in V(G)} d_G(v)$ tiene la misma paridad que la cantidad de vértices de grado impar. Como por el lema del apretón de manos, $\sum_{v\in V(G)} d_G(v)$ es par, la cantidad de vértices de grado impar de G es par. □

Corolario

Un grafo k-regular con n vértices tiene $nk/2$ aristas.

Demostración.

Sea G un grafo k-regular con n vértices. Por el lema del apretón de manos

$$|E(G)| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d_G(v) = \frac{1}{2}nk.$$

□

Grafos bipartitos regulares

Lema

Si $k > 0$, todo grafo bipartito k-regular con bipartición $\{X, Y\}$ satisface $|X| = |Y|$.

Demostración.

En efecto, si contamos las aristas por su número de incidencias en X obtenemos que $k|X| = |E(G)|$. Por simetría, $k|Y| = |E(G)|$. Como $k \neq 0$, $|X| = |Y|$. $\square$

Paseos en grafos

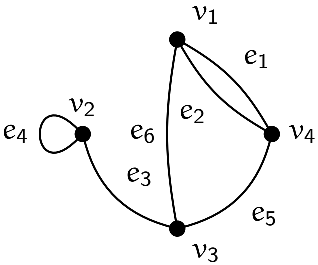
Definimos caminos y ciclos en un grafo como subgrafos que son caminos y ciclos, respectivamente.
Daremos definiciones que permiten modelar “desplazamientos” más generales sobre grafos.

Paseos, recorridos, caminos y ciclos

- Un paseo es una lista $v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$ de vértices y aristas tal que para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, la arista e_i tiene extremos v_{i-1} y v_i.
- Los extremos de dicho paseo son v_0 y v_k y su longitud es k (su número de aristas).
- Un tal paseo se cerrado si $v_0 = v_k$.
- Un recorrido es un paseo que no repite aristas.
- Un camino es un paseo que no repite vértices (y por lo tanto tampoco aristas).
- Un ciclo es un paseo cerrado que no repite vértices más allá del primer y el último vértice.

Ejemplo de paseos, recorridos, caminos y ciclos

Consideremos el grafo



Entonces:

- $W = v_4, e_1, v_1, e_1, v_4, e_2, v_1, e_6, v_3, e_3, v_2, e_4, v_2, e_3, v_3$ es un paseo de longitud 7 pero no es un recorrido (porque repite las aristas e_1 y e_3).
- Si quitamos los primeros dos y los últimos dos elementos de W, obtenemos un recorrido de longitud 5 (que no es camino).
- $v_4, e_1, v_1, e_6, v_3, e_3, v_2$ es un camino.
- $v_4, e_2, v_1, e_6, v_3, e_5, v_4$ y v_2, e_4, v_2 son ciclos.

Caminos y ciclos

Observaciones

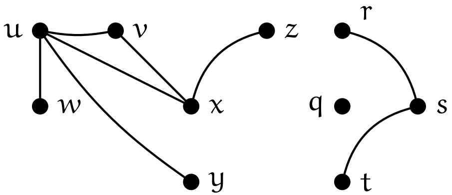
- Los vértices y aristas de un camino son exactamente los vértices y aristas de un subgrafo que es un (grafo) camino.
- Recíprocamente, para todo subgrafo que es un (grafo) camino, sus vértices y aristas son aquellas que forman algún camino del grafo.
- Por esta razón, no genera problemas hablar de camino en un grafo para referirse tanto a un tipo especial de paseo como a un tipo especial de subgrafo.
- Una identificación análoga aplica a los ciclos en grafos. Hablamos de ciclo en un grafo para referirnos a un tipo de paseo y también a un tipo de subgrafo.

Paseos en grafos simples

- Las aristas en los paseo se enumeran a efectos de poder distinguir entre aristas múltiples cuando el grafo no es simple.
- Cuando el grafo es simple, el paseo queda determinado por la lista de vértices solamente.
- Seguimos la siguiente convención para simplificar la escritura de ciclos en grafos simples: No repetir el último vértice y encerrar la enumeración de vértices entre paréntesis.

Paseos en grafos simples

Consideramos el siguiente grafo simple



Entonces:

- $W = u, v, x, z, x, u$ es un paseo de longitud 5 que no es un recorrido porque repite la arista xz.
- Todo recorrido que contiene a z lo tiene por extremo.
- Son caminos (entre otros): w, u, v, x, z; r, s; q.
- (u, v, x) es el único ciclo.

Paseos y caminos

Decimos que un paseo W_1 contiene un camino o ciclo W_2 si los vértices y aristas de W_2 están presentes en W_1.

Lema

Todo paseo contiene un camino con sus mismos extremos.

Demostración.

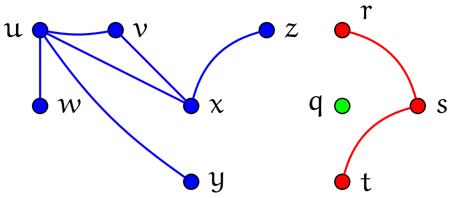
Por inducción en la longitud ℓ del paseo. Si $\ell = 0$, es trivial. Supongamos que $\ell > 0$ y que el lema vale para paseos con longitud menor que ℓ. Sea W un paseo con extremos u y v de longitud ℓ. Si W no tiene vértices repetidos entonces W es un camino y el lema vale. Luego, sin pérdida de generalidad, W tiene al menos un vértice repetido w. Si W' es un paseo que se obtiene borrando los vértices y aristas entre dos apariciones de w (dejando solo una de las dos apariciones de w en sí), se obtiene un paseo W' cuyos vértices y aristas lo son también de W. Por construcción, W' tiene extremos u y v y longitud menor que ℓ. Por hipótesis inductiva, W' contiene un camino P con extremos u y v. Por construcción, W contiene P. $\square$

Componentes

Recordemos que un grafo es conexo si contiene un camino con extremos u y v para cada par de vértices u y v de G.

Componentes

Las componentes (o componentes conexas) de un grafo son los subgrafos conexos maximales del grafo; es decir, los subgrafos conexos que no están contenidos en ningún otro subgrafo conexo.



Este grafo tiene tres componentes: los subgrafos verde, rojo y azul.

Componentes

Observaciones

- Agregar una arista entre vértices en distintas componentes combina dos componentes en una única componente.
- Luego, el agregar una arista reduce el número de componentes en 1 o lo deja igual.
- Como el grafo con n vértices y sin aristas tiene n componentes, todo grafo con n vértices y k aristas tiene al menos $n - k$ componentes.
- Notemos también que quitar una arista aumenta el número de componentes en 1 o lo deja igual.

Paseos y ciclos impares

Vamos a probar una caracterización de Kőnig (1916) de los grafos bipartitos en términos de sus ciclos. Para ello necesitamos probar un lema sobre paseos y ciclos impares.

Paseo, recorrido, camino o ciclo impar

Un paseo impar es un paseo de longitud impar.
El paseo se dice par en caso contrario.
Esta clasificación se aplica igualmente para los tipos especiales de paseos como son los recorridos, caminos y ciclos.

Notemos que un bucle es un ciclo impar (de longitud 1) y que dos aristas con los mismos dos extremos forman un ciclo par (de longitud 2).

Paseos y ciclos impares

Lema

Todo paseo cerrado impar contiene un ciclo impar.

Demostración.

Por inducción en la longitud ℓ del paseo. Si $\ell = 1$, el paseo cerrado es un bucle, un tipo especial de ciclo.

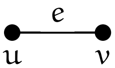
Supongamos que $\ell > 1$ y que el lema vale para paseos de longitud menor que ℓ. Sea W un paseo cerrado impar de longitud ℓ. Si W no tiene vértices repetidos (más allá del primer y el último vértice), entonces W es un ciclo y el lema vale. Luego, sin pérdida de generalidad, W tiene un vértice repetido v (más allá del primer y el último vértice). Podemos suponer que W empieza en v y separar W en dos paseos cerrados W_1 y W_2 que empiezan y terminan en v. Como W es impar, al menos uno de ellos tiene longitud impar y, por hipótesis inductiva, contiene un ciclo impar. Por construcción, W contiene también dicho ciclo impar. $\square$

Paseos y ciclos impares

Pregunta

¿Puede un paseo cerrado par no contener ningún ciclo?

Sí. Por ejemplo, el grafo



no contiene ciclos pero admite a u, e, v, e, u como un paseo cerrado par.

Caracterización de los grafos bipartitos

Teorema (Kőnig, 1916)

Un grafo es bipartito si y sólo si no tiene ciclos impares.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea G un grafo bipartito. Fijada una bipartición, todo paseo alterna entre los dos conjuntos de la bipartición, así que toda vez que se regresa a un vértice es después de un número par de aristas. Esto prueba que G no tiene ciclos impares.

$\Leftarrow$) Supongamos que G no tiene ciclos impares. Vamos construir una bipartición para cada componente de G.

Sea H una componente de G y sea u un vértice de H. Como H es conexo, para cada $v \in V(H)$ existe al menos un camino con extremos u y v. Sea $f(v)$ la longitud mínima de un tal camino con extremos u y v, para cada $v \in V(H)$. Sean

$$X = \{v \in V(H) : \ f(v) \text{ es par}\} \text{ e}$$
$$Y = \{v \in V(H) : \ f(v) \text{ es impar}\}. \qquad (\dots)$$

Caracterización de los grafos bipartitos

Demostración (cont.)

Afirmamos que $\{X, Y\}$ es una bipartición de H. Supongamos, por el absurdo, que no es así. Luego, existe al menos una arista $e \in E(H)$ con extremos v y w tales que $v, w \in X$ o $v, w \in Y$. Combinando un camino de v a u de longitud $f(v)$ con un camino de longitud $f(w)$ de u a w, obtenemos un paseo con extremos v y w de longitud $f(v) + f(w)$, que es un número par. Dicho paseo junto con la arista e forma un paseo cerrado impar y, por el lema anterior, H contiene un ciclo impar. Esto contradice el hecho de que H es un subgrafo de G y G no contiene ciclos impares. Esta contradicción muestra que $\{X, Y\}$ es una bipartición de H, como queríamos. Como H es una componente arbitraria de G, hemos probado que cada componente de G tiene una bipartición. $(\ldots)$

Caracterización de los grafos bipartitos

Demostración (cont.)

Sean $H_1, \ldots, H_k$ las componentes de G y sea $\{X_i, Y_i\}$ una bipartición de H_i para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.
Sean $X = X_1 \cup \cdots \cup X_k$ e $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_k$.
Afirmamos que $\{X, Y\}$ es una bipartición de G. En efecto, X es un conjunto independiente de G pues no existe ninguna arista con ambos extremos en X_i (por construcción) ni con un extremo en X_i y el otro en X_j (porque contradiría el hecho de que dichos extremos pertenecen a componentes distintas de H) para todo $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Análogamente, Y es un conjunto independiente de G. Como claramente $X \cap Y = \emptyset$ y $X \cup Y = V(G)$, $\{X, Y\}$ es una bipartición de G. Luego, G es bipartito por definición. $\square$

Grafos bipartitos y no bipartitos

- La definición de grafo bipartito nos da una manera muy simple de probar que un grafo es bipartito: exhibir una bipartición.
- Sin embargo, para demostrar que un grafo no es bipartito por definición requeriría mostrar que ninguna partición de su conjunto de vertices puede consistir en dos conjuntos independientes.
- La caracterización de los grafos bipartitos que acabamos de ver nos asegura que para cualquier grafo que no es bipartito existe una manera muy sencilla de probar que efectivamente no lo es: exhibir un ciclo impar.
- Más aún, la demostración de la caracterización se puede convertir en un algoritmo muy eficiente (lineal) para encontrar un ciclo impar en cualquier grafo dado que no sea bipartito.

Remoción de vértices y aristas

Cuando hablamos de remover vértices, nos referimos a remover los vértices junto a todas las aristas incidentes en al menos uno de ellos.

Remoción de vértices

Si G es un grafo y $W \subseteq V(G)$, el grafo que se obtiene al remover el conjunto de vértices W de G, denotado $G - W$, es el subgrafo de G cuyo conjunto de vértices es $V(G) - W$ y cuyo conjunto de aristas es $\{e \in E(G) \colon\ e$ no tiene ningún extremo en $W\}$.

Si $W = \{v\}$ entonces $G - W$ se denota simplemente por $G - v$.

Remoción de vértices y aristas

Cuando hablamos de remover aristas, se preservan sus extremos.

Remoción de aristas

Si G es un grafo y $F \subseteq E(G)$, el grafo que se obtiene al remover el conjunto de aristas F de G, denotado $G - F$, es el subgrafo con el mismo conjunto de vértices que G y cuyo conjunto de aristas es $E(G) - F$.

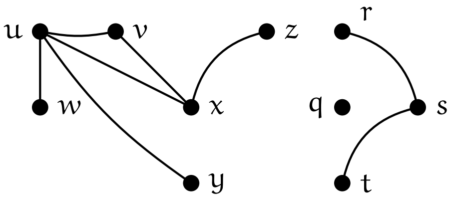
Si $F = \{e\}$ entonces $G - F$ se denota simplemente por $G - e$.

Vértices y aristas de corte

La remoción de algunos vértices o aristas puede incrementar el número de componentes.

Vértices y aristas de corte

Un vértice o una arista de un grafo se dice de corte si su remoción incrementa el número de componentes del grafo.



En este grafo, los vértices de corte son u, x y s y las aristas de corte son uw, uy, xz, rs y st.

Caracterización de las aristas de corte

Teorema

Una arista es de corte si y sólo si no pertenece a ningún ciclo.

Demostración.

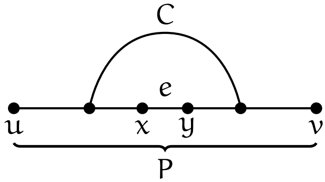
Sea $e = xy$ una arista de un grafo G y sea H la componente de G que contiene a e. Como la remoción de e afecta solamente a la componente H de G, alcanza con probar que $H - e$ es conexo si y sólo si e pertenece a un ciclo.

$\Rightarrow$) Supongamos que $H - e$ es conexo. Esto implica que $H - e$ contiene un camino con extremos x e y. Este camino junto con e completa un ciclo. $(\ldots)$

Caracterización de las aristas de corte

Demostración (cont.)

$\Leftarrow$) Supongamos que e pertenece a ciclo C. Sean u y v dos vértices de H. Como H es conexo, existe un camino P en H con extremos u y v. Si P no contiene a e entonces P es un camino también en $H - e$. Si P contiene a e, supongamos que x está entre u e y en P.



Como $H - e$ contiene un camino entre u y x a lo largo de P, un camino entre x e y a lo largo de C y un camino entre y y v a lo largo de P entonces hay un paseo en $H - e$ con extremos en u y v. Luego, por un lema anterior, hay también un camino en $H - e$ con extremos u y v. Concluimos que $H - e$ es conexo. $\square$

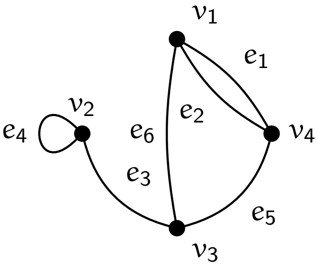
Subgrafo inducido

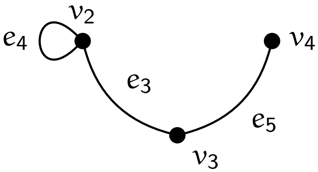
Subgrafo inducido

Si G es un grafo y T es un conjunto se define el subgrafo de G inducido por T, y se denote G[T], al subgrafo de G definido por

$$G[T] = G - (V(G) - T).$$

Notemos que si $W \subseteq V(G)$, el conjunto de vértices de $G[W]$ es W.





Subgrafo inducido por $\{v_2, v_3, v_4\}$

Unión de grafos

Unión de grafos

Un grafo G es la unión de los subgrafos $G_1, \ldots, G_k$ si

$$V(G) = V(G_1) \cup \cdots \cup V(G_k) \quad \text{y}$$
$$E(G) = E(G_1) \cup \cdots \cup E(G_k).$$

Lo denotamos por $G = G_1 \cup \cdots \cup G_k$.

A diferencia de la descomposición, en la unión de grafos, cada arista puede pertenecer a más de un subgrafo de la unión.

Unión de grafos

Teorema

El grafo completo K_n se puede expresar como la unión de k grafos bipartitos si y sólo si $n \leqslant 2^k$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Por inducción en k. Si $k = 1$, la implicación es cierta porque si K_n se puede expresar como la unión de 1 grafo bipartito entonces K_n es bipartito y, necesariamente, $n \leqslant 2$.
Sea $k > 1$ y supongamos que si $K_{n'}$ es la unión de $k-1$ grafos bipartitos entonces $n' \leqslant 2^{k-1}$. Supongamos que $K_n = G_1 \cup \cdots \cup G_k$ donde $G_1, \ldots, G_k$ son bipartitos. Sea $\{X_k, Y_k\}$ una bipartición de G_k. Sea $\{X, Y\}$ una partición de $V(K_n)$ tal que $X_k \subseteq X$ e $Y_k \subseteq Y$. Como toda arista de G_k une un vértice de X con uno de Y, $K_n[X] = G_1[X] \cup \cdots \cup G_{k-1}[X]$ y $K_n[Y] = G_1[Y] \cup \cdots \cup G_{k-1}[Y]$. Como $K_n[X]$ y $K_n[Y]$ son completos y se expresan como unión de $k-1$ grafos bipartitos, la hipótesis inductiva implica que $|X| \leqslant 2^{k-1}$ y $|Y| \leqslant 2^{k-1}$. Luego, $n = |X| + |Y| \leqslant 2^k$. $(\ldots)$

Unión de grafos

Demostración (cont.)

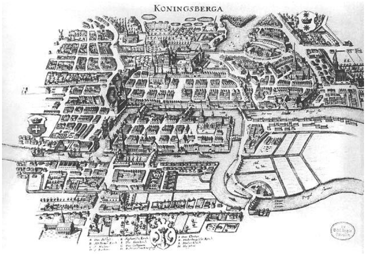
$\Leftarrow$) Por inducción en k. Si $k = 1$, la implicación es cierta porque si $n \leqslant 2$ entonces K_n es bipartito y, trivialmente, es la unión de 1 grafo bipartito.
Sea $k > 1$ y supongamos que si $n' \leqslant 2^{k-1}$ entonces $K_{n'}$ es la union de $k-1$ grafos bipartitos. Supongamos que $n \leqslant 2^k$. Sea $\{X, Y\}$ una partición de los vértices de K_n donde $|X| \leqslant 2^{k-1}$ y $|Y| \leqslant 2^{k-1}$. Por la hipótesis inductiva, $K_n[X] = G'_1 \cup \cdots \cup G'_{k-1}$ y $K_n[Y] = G''_1 \cup \cdots \cup G''_{k-1}$ donde $G'_1, \ldots, G'_{k-1}, G''_1, \ldots, G''_{k-1}$ son grafos bipartitos. Si $G_i = G'_i \cup G''_i$ entonces G_i es bipartito para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ (porque cualquier ciclo impar de G_i debería estar contenido en G'_i o G''_i). Como $G_1 \cup \cdots \cup G_{k-1} = K_n[X] \cup K_n[Y]$ entonces

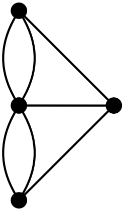
$$K_n = G_1 \cup \cdots \cup G_{k-1} \cup G_k$$

donde G_k es el grafo bipartito completo con bipartición $\{X, Y\}$.
Esto muestra que G es la unión de k grafos bipartitos. $\square$

Grafos eulerianos

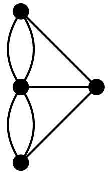
La ciudad de Königsberg (actual Kaliningrado) se situa sobre el río Pregel y se extiende sobre la isla Kneiphof y otras áreas sobre ambas márgenes. En la época de Euler, dichas regiones estaban unidas por siete puentes con la siguiente configuración:





Los ciudadanos de Königsberg se preguntaban si podrían salir de sus casas, recorrer exactamente una vez cada uno de los puentes y volver a casa. Euler observó que este problema era equivalente a hallar un recorrido cerrado que contenga todas las aristas del grafo de la derecha.

Grafos eulerianos



En un tal recorrido, cada vez que entramos y salimos de un vértice, recorremos dos aristas incidentes en él. También podemos formar un par entre el primer puente y el último puente del recorrido. Por lo tanto, para que exista tal recorrido cada vértice tiene que tener grado par.

Circuitos y grafos eulerianos

Un recorrido es euleriano si atraviesa todas las aristas.
Un grafo euleriano es uno que posee un recorrido euleriano cerrado.
Un circuito es un recorrido cerrado en el que nos da igual cuál es el primer vértice pero preservamos el orden cíclico del mismo.
Un vértice es par o impar de acuerdo a si su grado es par o impar, respectivamente.
Un grafo par es uno con todos los vértices pares.

Caracterización de grafos eulerianos

Para la caracterización probaremos un lema sobre caminos maximales.

Camino maximal

Un camino es maximal si no está contenido en ningún otro camino.

Como los grafos que consideramos son finitos, ningún camino se puede extender indefinidamente, por lo que todo grafo contiene al menos un camino maximal.

Lema

Si todo vértice de un grafo G tiene grado al menos 2 entonces G contiene al menos un ciclo.

Demostración.

Sea P un camino maximal de G y sea u un extremo de P. Como P no se puede extender, todo vecino de u debe ser un vértice de P. Como u tiene grado al menos 2 en G, tiene algún vecino v en $V(P)$ a través de una arista e que no es de P. La arista e junto con el subcamino de P que une u con v forma un ciclo en G. $\square$

Teorema de Euler

Teorema de Euler

Un grafo G es euleriano si y solo si tiene a lo sumo una componente no trivial y sus vértices tienen todos grados par.

Demostración.

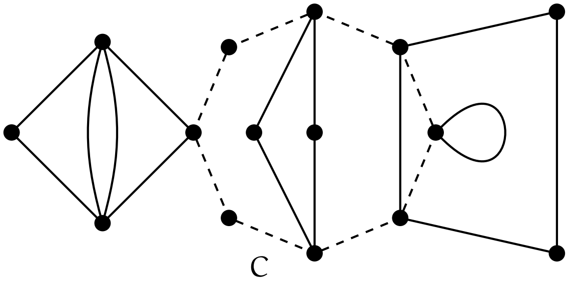
$\Rightarrow$) Supongamos que G tiene un circuito euleriano C. Cada vez que C pasa por un vértice usa dos aristas incidentes en él y la primera arista se puede poner en un par junto con la última arista. Por lo tanto todo vértice de G tiene grado par. Como además, dos aristas que pertenecen a un mismo recorrido están en una misma componente, G tiene a lo sumo una componente no trivial.
$\Leftarrow$) Supongamos que G tiene a lo sumo una componente no trivial y sus vértices tienen todos grados par. Aplicamos inducción en la cantidad m de aristas del grafo.
Si $m = 0$ entonces alcanza con considerar un recorrido con un solo vértice. (...)

Teorema de Euler

Demostración (cont.)

Supongamos que $m > 0$ y que la condición es suficiente para grafos con menos de m aristas. Como los grados de todos los vértices de G son pares, cada vértice en la componente no trivial tiene grado al menos 2. Por el lema anterior, la componente no trivial tiene un ciclo C. Sea G' el grafo que se obtiene a partir de G borrando $E(C)$. Como C tiene grado 0 o 2 en cada vértice, cada componente de G' es también un grafo par. Como cada componente de G' es también conexa y con menos de m aristas, podemos aplicar la hipótesis inductiva y concluir que cada componente de G' tiene un circuito euleriano. $(\ldots)$

Teorema de Euler



Demostración (cont.)

Veamos como combinar los circuitos eulerianos de cada una de las componentes con el ciclo C en un circuito euleriano de G. Recorremos C y, cada vez que llegamos a una componente de G' por primera vez, nos desviamos a lo largo de un circuito euleriano de esa componente, lo que nos regresa al vértice desde donde nos habíamos desviado; proseguimos con el resto de C de forma similar. Cuando hayamos completado el recorrido de C habremos completado un circuito euleriano de G. $\square$

Teorema de Euler

Lo siguiente es una consecuencia de la demostración anterior.

Corolario

Todo grafo par se descompone en ciclos.

Demostración.

En la demostración del teorema anterior vimos que todo grafo par no trivial tiene un ciclo y que la remoción de las aristas del ciclo deja un nuevo grafo par. Por lo tanto el resultado del teorema se sigue por inducción en la cantidad de aristas. $\square$

Teorema de Euler

Teorema

Para cada grafo conexo no trivial con exactamente $2k$ vértices impares, el mínimo número de recorridos en que puede descomponerse es $\max\{1, k\}$.

Demostración.

Un recorrido contribuye en un número par al grado de todos los vértices que no son sus extremos. Por lo tanto, en una descomposición en recorridos, cada vértice impar tiene que ser el extremo de alguno de los recorridos de la descomposición. Como cada recorrido tiene dos extremos, necesitamos al menos k recorridos para descomponer un grafo con $2k$ vértices impares. Además, como G es no trivial, se necesita al menos un recorrido. Esto prueba que el número de recorridos necesarios es al menos $\max\{1, k\}$. Solo nos resta probar que ese número de recorridos es suficiente. $(\ldots)$

Teorema de Euler

Demostración (cont.)

Si $k = 0$, por el Teorema de Euler, 1 recorrido alcanza y el teorema vale. Podemos suponer entonces que $k > 0$.
Sea G' un grafo que se obtiene a partir de G agregando k aristas, tal que cada uno de los $2k$ vértices de grado impar de G es incidente en exactamente una de las nuevas aristas. El grafo resultante tiene todos sus vértices de grado par (por construcción) y es conexo (porque G es conexo). Por el Teorema de Euler, admite un circuito euleriano C. Si al circuito C le quitamos las k aristas que agregamos, esto nos da una descomposición de G en k recorridos. Hemos probado que $\max\{1, k\}$ recorridos alcanzan para descomponer G. $\square$

Teorema de Euler

Corolario

Un grafo G admite un recorrido euleriano si y sólo si G tiene a lo sumo una componente no trivial y tiene exactamente 0 o 2 vértices impares.

Demostración.

Sea 2k el número de vértices impares de G. Notemos que G admite un recorrido euleriano si y sólo si se descompone en un único recorrido euleriano. Luego, por el teorema anterior, G admite un recorrido euleriano si y sólo si tiene a lo sumo una componente no trivial y $\text{máx}\{1, k\} = 1$, es decir, $k \in \{0, 1\}$ (lo que equivale a que G tiene 0 o 2 vértices impares). $\square$

Conjetura de reconstrucción

Conjetura de reconstrucción (Kelly y Ulam, 1942)

Si G es un grafo simple con al menos tres vértices $v_1, \ldots, v_n$ entonces G queda unívocamente determinado a partir de la lista (con repetición) de los grafos $G - v_1, \ldots, G - v_n$ no etiquetados.

Veamos que los grados de los vértices de G se pueden reconstruir.

Reconstrucción de grados

Proposición

Si G es un grafo simple con vértices $v_1, \ldots, v_n$ y $n \geqslant 3$ entonces

$$|E(G)| = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} |E(G - v_i)|$$

y

$$d_G(v_i) = |E(G)| - |E(G - v_i)| \quad \text{para cada } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

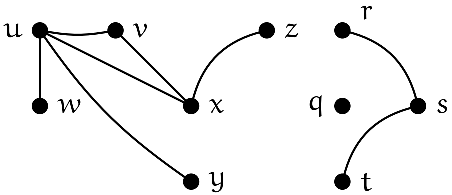
Demostración.

Un arista e de G aparece en $G - v_i$ si y sólo si v_i no es un extremo de e. Luego, $\sum_{i=1}^{n} |E(G - v_i)|$ cuenta cada arista $n - 2$ veces. Finalmente, el grado de v_i es igual a la cantidad de aristas de menos que tiene $G - v_i$ respecto de G. □

Vecindad

Vecindad

La vecindad de un vértice v en un grafo G, denotada $N_G(v)$, es el conjunto de vecinos de v en G.



Por ejemplo, en este grafo G, $N_G(x) = \{u, v, z\}$ y $N_G(q) = \emptyset$.

Propiedades extremales

Proposición

Si G es un grafo simple con n vértices y $\delta(G) \geqslant (n-1)/2$ entonces G es conexo.

Demostración.

Sean u y v dos vértices de G. Alcanzará con probar que si u y v no son vecinos entonces tienen un vecino en común.
Como G es simple, $|N_G(u)| \geqslant \delta(G) \geqslant (n-1)/2$. Por simetría, $|N_G(v)| \geqslant (n-1)/2$. Luego, si u y v no son vecinos,

$$|N_G(u) \cup N_G(v)| \leqslant n-2 < n-1 \leqslant |N_G(u)| + |N_G(v)|,$$

lo que muestra que $N_G(u) \cap N_G(v) \neq \emptyset$. □

Observación (La cota es ajustada)

Sea $n \geqslant 2$ y sea G la unión de dos grafos completos disjuntos, uno con $\lfloor n/2 \rfloor$ vértices y el otro con $\lceil n/2 \rceil$ vértices. Entonces G tiene n vértices, $\delta(G) = \lfloor n/2 \rfloor - 1 = \lceil (n-1)/2 \rceil - 1$ y G no es conexo.

Unión disjunta

Unión disjunta

Si G y H son dos grafos que no comparten vértices entonces la unión de G y H se llama unión disjunta y se denota $G + H$.

Si k es un entero no negativo y G es un grafo, kG denota la unión disjuntas de k copias de G.

Observaciones

- El ejemplo de la observación anterior es

$$G = K_{\lfloor n/2 \rfloor} + K_{\lceil n/2 \rceil}.$$

- Notemos que $K_r + K_s = \overline{K_{r,s}}$.

Propiedades extremales

Teorema

Todo grafo G sin bucles tiene un subgrafo bipartito con al menos $|E(G)|/2$ aristas.

Demostración.

Sea H un subgrafo bipartito de G con la máxima cantidad posible de aristas. Sin pérdida de generalidad, $V(H) = V(G)$. Sea $\{X, Y\}$ una bipartición de H. Por la maximalidad, las aristas de H son todas las aristas que unen un vértice de X con un vértice de Y en G. $(\ldots)$

Propiedades extremales

Demostración (cont.)

Afirmamos que $d_H(v) \geqslant d_G(v)/2$ para todo vértice v de G. Supongamos, por el absurdo, que existe $v \in X$ tal que $d_H(v) < d_G(v)/2$. Sea $X' = X - \{v\}$, $Y' = Y \cup \{v\}$ y H' el grafo con conjunto de vértices $V(G)$ y cuyas aristas son aquellas de G que unen un vértice de X' con uno de Y'.
Entonces

$$\begin{aligned}|E(H')| &= |E(H)| - d_H(v) + (d_G(v) - d_H(v)) \\ &= |E(H)| + 2\left(\frac{d_G(v)}{2} - d_H(v)\right) > |E(H)|,\end{aligned}$$

lo que contradice la maximalidad de H. Esta contradicción muestra que $d_H(v) \geqslant d_G(v)/2$ para todo vértice v de G. Luego, el lema del apretón de manos nos asegura que $|E(H)| \geqslant |E(G)|/2$. $\square$

Grafos sin triángulos

Teorema (Mantel, 1907)

El máximo número de aristas en un grafo simple de n vértices y sin triángulos es $\lfloor n^2/4 \rfloor$.

Demostración.

Sea x un vértice de grado máximo Δ. Como G no tiene triángulos, no hay aristas entre los vecinos de x. Por lo tanto, sumando los grados de x y de los no-vecinos de x estamos contando cada una de las aristas al menos una vez. En símbolos

$$\sum_{v \notin N_G(x)} d_G(v) \geqslant |E(G)|.$$

Como la suma es sobre $n - \Delta$ vértices, cada uno de ellos con grado a lo sumo Δ,

$$|E(G)| \leqslant \Delta(n - \Delta). \qquad (\ldots)$$

Grafos sin triángulos

Demostración (cont.)

Si consideramos a Δ como variable, el miembro derecho de

$$|E(G)| \leqslant \Delta(n - \Delta)$$

se maximiza, en $\Delta = \lfloor n/2 \rfloor$ y en $\Delta = \lceil n/2 \rceil$. Mas aún, ese máximo es $n^2/4$ si n es par y $(n^2 - 1)/4$ si n es impar. Estos valores coinciden con $\lfloor n^2/4 \rfloor$ para todo n (par o impar). Concluimos que $|E(G)| \leqslant \lfloor n^2/4 \rfloor$.
Para ver que la cota se alcanza, solo falta observar que $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$ no tiene triángulos y tiene $\lfloor n^2/4 \rfloor$ aristas. $\square$

Secuencia de grados

Secuencia de grados

La secuencia de grados de un grafo es la lista de los grados de sus vértices.

Teorema

Los enteros no negativos $d_1, d_2, \ldots, d_n$ son los grados de un grafo de n vértices si y sólo si $d_1 + \cdots + d_n$ es par.

Demostración.

$\Rightarrow$) Se sigue del lema del apretón de manos.
$\Leftarrow$) Supongamos que $d_1 + \cdots + d_n$ es par. Vamos a construir un grafo con secuencia de grados $d_1, \ldots, d_n$. Como $d_1 + \cdots + d_n$ es par, la cantidad q de elementos de $d_1, \ldots, d_n$ que son impares es par. Sea $q = 2k$. Comenzamos con el grafo con vértices $v_1, \ldots, v_n$ y sin aristas. Le agregamos k aristas tales que cada v_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) tal que d_i es impar es incidente en exactamente una de esas k aristas. Finalmente, agregamos bucles en todos los vértices hasta lograr que el grado de cada v_i sea d_i. $\square$

Secuencias gráficas

Secuencia gráfica

Una secuencia gráfica es la lista de grados de algún grafo simple. Se dice que el grafo simple realiza la secuencia.

Claramente, la única secuencia gráfica de longitud 1 es la secuencia 0.

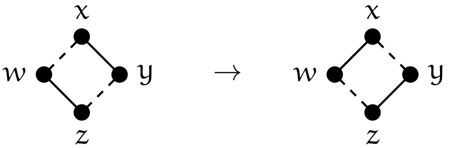
Teorema (Havel, 1955; Hakimi, 1962)

Si $n > 1$, una lista d de n enteros no negativos es gráfica si y sólo si d' es gráfica, donde d' se obtiene a partir de d borrando su máximo elemento Δ y restando 1 de sus siguientes Δ mayores elementos.

Secuencias gráficas

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que G es un grafo simple que realiza d ($d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$). Vamos a construir un grafo G' que realiza d'. Sea w un vértice de G de grado Δ. Sea S un conjunto de Δ vértices con grados $d_2, \ldots, d_{\Delta+1}$. Notar que $|N_G(w)| = |S|$. Supongamos que $N_G(w) \neq S$. Por lo tanto, w tiene un vecino $z \notin S$ y un no-vecino $x \in S$. Vamos a modificar G para incrementar $|N(w) \cap S|$. Como $d_G(x) \geqslant d_G(z)$ y w es un vecino de z pero no de x, debe haber un vértice y adjacente a x pero no a z. Borramos las aristas wz y xy y agregamos las aristas wx e yz.



El grafo obtenido sigue realizando d pero incrementamos $|N_G(w) \cap S|$. Repetimos esta operación hasta que $N_G(w) = S$. Como $N_G(w) = S$, alcanza con tomar $G' = G - w$. $(\ldots)$

Secuencias gráficas

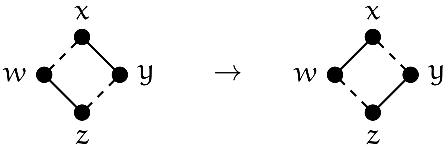
Demostración (cont.)

$\Leftarrow$) Supongamos que d' es gráfica. Supongamos que d está formada por $\mathrm{d}_1 \geqslant \mathrm{d}_2 \geqslant \cdots \geqslant \mathrm{d}_n$. Sea G' un grafo simple que realiza d'. Sea G el grafo que se obtiene de G' agregando un vértice adyacente a vértices con grados
$\mathrm{d}_2 - 1, \mathrm{d}_3 - 1, \ldots, \mathrm{d}_{\Delta+1} - 1$. Estos son los Δ mayores elementos de d luego de Δ. Por construccion, G realiza d. $\square$

Secuencias gráficas y 2-intercambios

2-intercambio

Si G es un grafo simple tal que xy and zw son aristas e yz y xw no son aristas de G, un 2-intercambio es la operación de quitar las aristas xy y zw y agregar las aristas yz y xw.



Claramente, cada 2-intercambio preserva los grados de todos los vértices.

Vamos a probar que, recíprocamente, dos grafos simples que tienen los mismos vértices y con los mismos grados se pueden transformar el uno en el otro mediante una secuencia de 2-intercambios.

Secuencias gráficas y 2-intercambios

Teorema (Berge, 1973)

Sean G y H dos grafos simples con el mismo conjunto de vértices V. Entonces $d_G(v) = d_H(v)$ para todo $v \in V$ si y sólo si existe una secuencia de 2-intercambios que transforman G en H.

Demostración.

$\Rightarrow$) Por inducción en $n = |V|$. Si $n \leqslant 2$, se sigue por inspección. Sea $n > 2$ y supongamos que teorema vale para grafos con menos de n vértices. Sea w un vértice de grado máximo Δ. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_\Delta\}$ un conjunto de vértices distintos de w con los siguientes mayores Δ grados. Como en la demostración anterior, mediante una secuencia de 2-intercambios aplicados a G es posible obtener un grafo G^* tal que $N_{G^*}(w) = S$. Análogamente, mediante una secuencia de 2-intercambios aplicados a H es posible obtener H^* tal que $N_{H^*}(w) = S$. $(\ldots)$

Secuencias gráficas y 2-intercambios

Demostración (cont.)

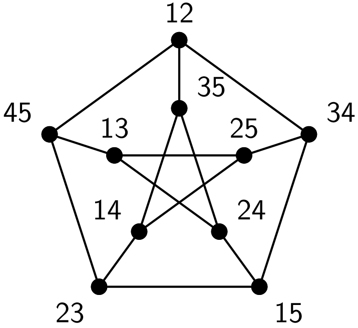
Como $N_{G^*}(w) = N_{H^*}(w)$, cada $v \in V - \{w\}$ tiene el mismo grado en $G^* - w$ que en $H^* - w$. Por hipótesis inductiva, existe una secuencia de 2-intercambios que lleva $G^* - w$ en $H^* - w$. Como estos 2-intercambios no involucran a w y $N_{G^*}(w) = N_{H^*}(w)$, estos mismos 2-intercambios transforman G^* en H^*. Como la operación inversa de un 2-intercambio es otro 2-intercambio, H se obtiene de G mediante una secuencia de 2-intercambios.

$\Leftarrow$) Si H se obtiene de G por una secuencia de 2-intercambios entonces $d_G(v) = d_H(v)$ para todo $v \in V$ porque cada 2-intercambio preserva los grados de los vértices. $\square$

Grafo de Petersen

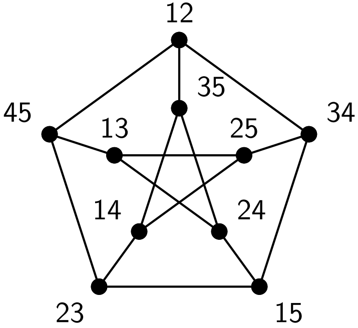
Grafo de Petersen

El grafo de Petersen es el grafo simple cuyos vértices son los subconjuntos de dos elementos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y con una arista entre dos vértices si y sólo si corresponden a conjuntos disjuntos.



Holton, D. A., & Sheehan, J. (1993). The Petersen Graph (Vol. 7). Cambridge University Press.

Grafo de Petersen



Observación

Todo par de vértices no adyacentes del grafo de Petersen tienen exactamente un vecino en común.

Demostración.

Dos vértices no adyacentes corresponden a dos subconjuntos de tamaño 2 que se intersecan: $\{a, b\}$ y $\{a, c\}$. Como todo vecino común de ellos debe ser disjunto a ambos, el único vecino común es $\{d, e\}$ donde $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{a, b, c, d, e\}$. $\square$

Cintura

Cintura

La cintura de un grafo con ciclos es la longitud de su ciclo más corto. Un grafo sin ciclos tiene cintura infinita.

Proposición

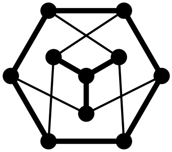
El grafo de Petersen tiene cintura 5.

Demostración.

El grafo es simple, por lo que no tiene ciclos de longitud 1 ni 2. No tiene ciclos de longitud 3 porque sus vértices serían tres subconjuntos de dos elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ disjuntos dos a dos. No tiene ciclos de longitud 4 por la observación anterior. Tiene un ciclo de longitud 5: $(12, 34, 15, 23, 45)$. $\square$

Número de ciclos de longitud 6

¿Cuántos ciclos de longitud 6 tiene el grafo de Petersen?
Cada par de vértices "opuestos" de un ciclo de longitud 6 tienen un único vecino común. Como estos tres vértices tienen grado 3, son distintos dos a dos. Por lo tanto, al borrar los vértices de un ciclo de longitud 6 resulta en un $K_{1,3}$, llamado también claw.

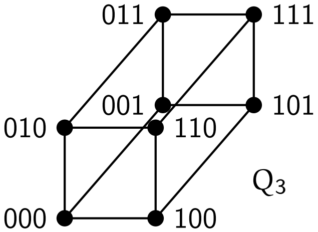


¿Vale al revés? Sea H un $K_{1,3}$ inducido. Sea S el conjunto de vértices de grado 1 de H. Como el vértice central es el único vértice común de cada par de vértices de S, entonces las 6 aristas que no inciden en el vértice central y sí en algún vértice de S inciden en 6 vértices distintos. Luego, $G - V(H)$ es 2-regular. Como G tiene cintura 5 entonces $G - V(H)$ es un ciclo de longitud 6.
Por lo tanto hay tantos ciclos de longitud 6 como claws inducidos. Como es 3-regular y no tiene triángulos, este número es 10.

Hipercubo

Hipercubo

El cubo k-dimensional o hipercubo Q_k es el grafo simple cuyas aristas son las k-tuplas con entradas 0 y 1 y cuyas aristas son los pares de k-tuplas que difieren en exactamente una posición.



- ¿Es bipartito? Sí, porque la partición del conjunto de sus vértices en dos conjuntos de acuerdo a si la suma de la k-tupla es par o impar es una bipartición.
- ¿Cuántas aristas tiene? Como cada tiene 2^k vértices y k-regular entonces, por un lema anterior, tiene $nk/2 = 2^k k/2 = k2^{k-1}$ aristas.