Tópicos Fundamentales en Teoría de Grafos

Instituto de Cálculo, UBA - 2.º semestre 2018

Trabajo Práctico 2

1. Caracterizar los grafos cuyo grado máximo es a lo sumo 2. Caracterizar los árboles con grado máximo a lo sumo 2.

2. Demostrar que si T es un árbol entonces la excentricidad de cada vértice v de T es igual a la máxima distancia de v a una hoja de T.

3. Sea T un árbol con al menos tres vértices y sea T' el grafo que se obtiene a partir de T removiendo todas las hojas de T. Demostrar que si u es un vértice de T que no es una hoja de T entonces $\epsilon_{T'}(u) = \epsilon_T(u) - 1$.

4. Sea D una orientación de un árbol. Demostrar que D es un árbol saliente con raíz v si y sólo si para cada $u \in V(D)$ existe un camino en D que une v con u.

5. Sea D un digrafo con un vértice v con grado entrante 0 y tal todos los demás vértices de D tienen grado entrante 1. Demostrar que D es la unión disjunta de un árbol saliente con raíz en v con un cierto número (eventualmente cero) de digrafos con un único ciclo cada uno.

6. Sea W un recorrido euleriano cerrado de un digrafo fuerte D y sea v el primer vértice de W. Para cada vértice $u \in V(D) - \{v\}$, sea e_u la última arista atravesada por W entre las aristas con cola u. Demostrar que cada arista e_u se extiende a un camino de u a v en D formado por aristas en el conjunto $F = \{e_u \colon u \in V(D) - \{v\}\}$. Concluir que F es el conjunto de aristas de un árbol generador entrante de D.

7. Sea A una matriz de adyacencia de un grafo G sin bucles. Probar que A tiene n autovalores reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y que, para cada entero no negativo k, el número de paseos cerrados de G de longitud k es $\lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$.

8. Sea G un grafo sin bucles con exactamente n vértices y k componentes. Demostrar que si M es una matriz de incidencia de una orientación cualquiera de G entonces M tiene rango $n - k$.

9. Sea G un grafo sin bucles con exactamente n vértices y k componentes. Demostrar que si Q es una matriz laplaciana de G entonces Q tiene rango $n - k$.

10. Sea G un grafo conexo y sin bucles y sea Q una matriz laplaciana de G. Demostrar que el producto de los autovalores no nulos de Q es igual a $n \cdot \tau(G)$, donde $\tau(G)$ denota el número de árboles generadores de G.

Justifique todas sus respuestas.