Tópicos Fundamentales en Teoría de Grafos

Instituto de Cálculo, UBA - 2.º semestre 2018

Trabajo Práctico 4

1. Para cada k, dar un procedimiento para construir explícitamente un conjunto máximo de caminos internamente disjuntos entre dos vértices distintos cualesquiera x e y del hipercubo Q_k. (Sugerencia: Considerar primero el caso en que $x = (0,\ldots,0)$ e $y = (1,\ldots,1)$.)

2. (a) Demostrar que si G es un grafo simple tal que $\delta(G) \geq |V(G)| - 2$ entonces $\kappa(G) = \delta(G)$.
   (b) Para cada $n \geq 4$, dar un ejemplo de un grafo simple G con $\delta = |V(G)| - 3$ y $\kappa(G) < \delta(G)$.

3. Demostrar que todo grafo simple G tal que $\delta(G) \geq (|V(G)| + k - 2)/2$ es k-conexo.

4. Demostrar que cada bloque de un grafo sin ciclos pares es un vértice, una aristas o un ciclo impar.

5. Demostrar que un grafo es par si y sólo si todos sus bloques son grafos pares. (Recordemos que un grafo se dice *par* si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.)

6. Sean e_1, e_2 y e_3 aristas de un grafo G. Probar que si G contiene un ciclo que pasa por e_1 y e_2 y un ciclo que pasa por e_2 y e_3 entonces G tiene un ciclo que pasa por e_1 y e_3.

7. Demostrar que todo grafo 3-conexo que no es bipartito contiene al menos cuatro ciclos impares.

8. Demostrar que todo grafo k-conexo con al menos $2k$ vértices tiene un ciclo de longitud al menos $2k$.

9. Sean $[S,\overline{S}]$ y $[T,\overline{T}]$ cortes fuente/sumidero de una red N.
   (a) Demostrar que $\operatorname{cap}(S\cup T,\overline{S\cup T}) + \operatorname{cap}(S\cap T,\overline{S\cap T}) \leq \operatorname{cap}(S,\overline{S}) + \operatorname{cap}(T,\overline{T})$.
   (b) Concluir que si $[S,\overline{S}]$ y $[T,\overline{T}]$ son cortes mínimos entonces $[S\cap T,\overline{S\cap T}]$ y $[S\cup T,\overline{S\cup T}]$ son también mínimos y ninguna arista entre $S - T$ y $T - S$ tiene capacidad positiva.

10. Sea D un digrafo acíclico. Supongamos que queremos hallar un conjunto $\mathscr{P}$ de mínimo cardinal posible formado por caminos de D disjuntos por vértices tales que cada vértice de D pertenece a algún camino en $\mathscr{P}$. Mostrar que es posible hallar tal conjunto $\mathscr{P}$ aplicando un algoritmo de flujo máximo al digrafo D' construido de la siguiente forma:
    (a) $V(D') = \{s, v_1,\ldots,v_n, v'_1,\ldots,v'_n, t\}$ donde $V(D) = \{v_1,\ldots,v_n\}$;
    (b) $E(D') = \{sv_i : v_i \in V(D)\} \cup \{v_i v'_j : v_i v_j \in E(D)\} \cup \{v'_j t : v_j \in V(D)\}$; y
    (c) todas las aristas tienen capacidad 1.

$\boxed{\textit{Justifique todas sus respuestas.}}$