

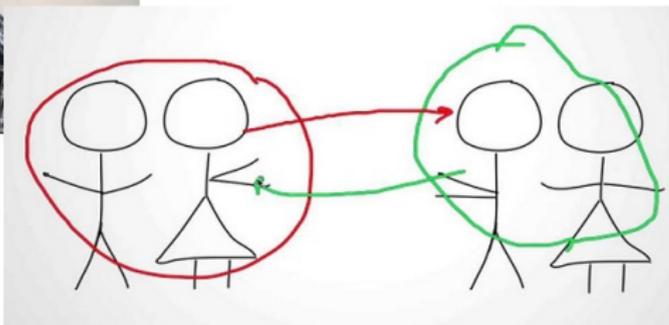
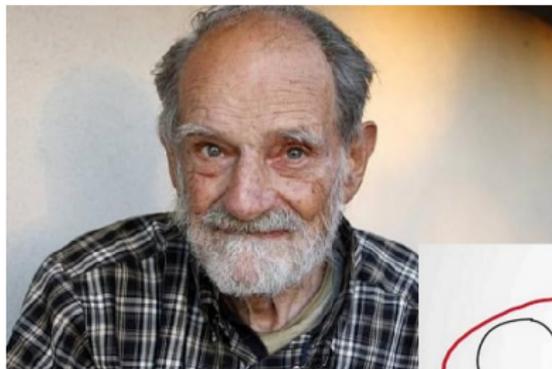
Teoría de Juegos - La revancha

Juan Pablo Pinasco (jpinasco@dm.uba.ar)

Departamento de Matemática e IMAS,
FCEyN, UBA - CONICET

Escuela: Algunas herramientas para abordar los sistemas sociales. Modelado y análisis de datos 2019

Lloyd Shapley



Marriage Theorem

Tres amigos Xérez, Yérez y Zérez conocen a tres amigas: Aernandez, Bernandez y Cernandez. Sin hablar, entre sí, cada uno rankea a los otros:

Marriage Theorem

Tres amigos Xérez, Yérez y Zérez conocen a tres amigas: Aernandez, Bernandez y Cernandez. Sin hablar, entre sí, cada uno rankea a los otros:

Xerez : *A B C*

Yerez : *B A C*

Zerez : *A C B*

Aernandez : *Y X Z*

Bernandez : *X Y Z*

Cernandez : *Y Z X*

Marriage Theorem

Tres amigos Xérez, Yérez y Zérez conocen a tres amigas: Aernandez, Bernandez y Cernandez. Sin hablar, entre sí, cada uno rankea a los otros:

Xerez : *A B C*

Yerez : *B A C*

Zerez : *A C B*

Aernandez : *Y X Z*

Bernandez : *X Y Z*

Cernandez : *Y Z X*

El algoritmo de Gale y Shapley dice:

- 1.- Cada hombre invita a salir a la mujer que está primera en la lista.

Marriage Theorem

Tres amigos Xérez, Yérez y Zérez conocen a tres amigas: Aernandez, Bernandez y Cernandez. Sin hablar, entre sí, cada uno rankea a los otros:

Xerez : *A B C*

Yerez : *B A C*

Zerez : *A C B*

Aernandez : *Y X Z*

Bernandez : *X Y Z*

Cernandez : *Y Z X*

El algoritmo de Gale y Shapley dice:

- 1.- Cada hombre invita a salir a la mujer que está primera en la lista.
- 2.- Cada mujer se queda con el hombre que está más arriba en su lista, y rechaza a los otros.

Marriage Theorem

Tres amigos Xérez, Yérez y Zérez conocen a tres amigas: Aernandez, Bernandez y Cernandez. Sin hablar, entre sí, cada uno rankea a los otros:

Xerez : *A B C*

Yerez : *B A C*

Zerez : *A C B*

Aernandez : *Y X Z*

Bernandez : *X Y Z*

Cernandez : *Y Z X*

El algoritmo de Gale y Shapley dice:

- 1.- Cada hombre invita a salir a la mujer que está primera en la lista.
- 2.- Cada mujer se queda con el hombre que está más arriba en su lista, y rechaza a los otros.
- 3.- Si a un hombre lo rechazaron, tacha a esa mujer de la lista.

Marriage Theorem

Tres amigos Xérez, Yérez y Zérez conocen a tres amigas: Aernandez, Bernandez y Cernandez. Sin hablar, entre sí, cada uno rankea a los otros:

Xerez : *A B C*

Yerez : *B A C*

Zerez : *A C B*

Aernandez : *Y X Z*

Bernandez : *X Y Z*

Cernandez : *Y Z X*

El algoritmo de Gale y Shapley dice:

- 1.- Cada hombre invita a salir a la mujer que está primera en la lista.
- 2.- Cada mujer se queda con el hombre que está más arriba en su lista, y rechaza a los otros.
- 3.- Si a un hombre lo rechazaron, tacha a esa mujer de la lista.
- 4.- Repita desde 1, hasta que queden formadas las 3 parejas.

Parte positiva

Teorema

- a.- *El algoritmo termina en finitos pasos.*
- b.- *No hay posibles divorcios.*

Parte negativa

Teorema

En todos los posibles matchings, para cada hombre hay un grupo de mujeres con los que queda emparejado; y para cada mujer hay un grupo de hombres con los que queda emparejado.

Parte negativa

Teorema

En todos los posibles matchings, para cada hombre hay un grupo de mujeres con los que queda emparejado; y para cada mujer hay un grupo de hombres con los que queda emparejado.

- a.- El algoritmo otorga a cada hombre la mejor de las mujeres posibles.*
- b.- El algoritmo otorga a cada mujer el peor de los hombres posibles.*

Parte negativa

Teorema

En todos los posibles matchings, para cada hombre hay un grupo de mujeres con los que queda emparejado; y para cada mujer hay un grupo de hombres con los que queda emparejado.

- a.- El algoritmo otorga a cada hombre la mejor de las mujeres posibles.*
- b.- El algoritmo otorga a cada mujer el peor de los hombres posibles.*

Teorema

El algoritmo no funciona para el matrimonio igualitario.

Ejemplo:

<i>Xerez</i> :	<i>Y</i>	<i>Z</i>	<i>W</i>
<i>Yerez</i> :	<i>Z</i>	<i>X</i>	<i>W</i>
<i>Zerez</i> :	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>W</i>
<i>Werez</i> :	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>

Ejemplo:

X erez : Y Z W

Y erez : Z X W

Z erez : X Y W

W erez : X Y Z

Las parejas $X - W$, $Y - Z$ no funcionan: X prefiere a Z , Z a X .

Ejemplo:

X erez : Y Z W

Y erez : Z X W

Z erez : X Y W

W erez : X Y Z

Las parejas $X - W$, $Y - Z$ no funcionan: X prefiere a Z , Z a X .

Las parejas $Y - W$, $X - Z$ tampoco: por Y , X .

Ejemplo:

$Xerez : Y \quad Z \quad W$

$Yerez : Z \quad X \quad W$

$Zerez : X \quad Y \quad W$

$Werez : X \quad Y \quad Z$

Las parejas $X - W$, $Y - Z$ no funcionan: X prefiere a Z , Z a X .

Las parejas $Y - W$, $X - Z$ tampoco: por Y , X .

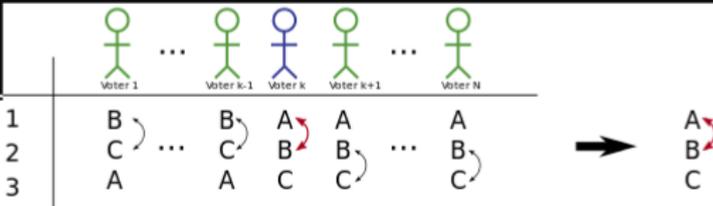
Las parejas $Z - W$, $X - Y$ tampoco: por Y , Z .

Kenneth Arrow



One way of looking at Impossibility Theorem is that we proposed some criteria for what a good system should be: what is it you want from a voting system, and impose some conditions. And then ask: can you have a voting system that guarantees that?

— *Kenneth Arrow* —



Tenemos tres candidatos A, B, C , y n votantes $1, 2, \dots, k, \dots, n$.

Tenemos tres candidatos A, B, C , y n votantes $1, 2, \dots, k, \dots, n$.

Definición: Un voto es un orden (o preferencia) entre los candidatos.

Definición: Una Constitución es un mecanismo que toma los $1, 2, \dots, n$ votos y devuelve un orden (o preferencia) entre los candidatos, llamado el orden social.

i.- **Unanimidad:** Si todos prefieren a X antes que a Y , el orden social también.

- i.- **Unanimidad:** Si todos prefieren a X antes que a Y , el orden social también. La Constitución ubica a X delante de Y .

- i.- **Unanimidad:** Si todos prefieren a X antes que a Y , el orden social también. La Constitución ubica a X delante de Y .

- ii.- **Independencia de las alternativas:** si la preferencia de cada votante entre X e Y se mantiene, pero cambian sus preferencias respecto a los otros candidatos, la Constitución no cambia el orden relativo entre X e Y .

Hipótesis

- i.- **Unanimidad:** Si todos prefieren a X antes que a Y , el orden social también. La Constitución ubica a X delante de Y .
- ii.- **Independencia de las alternativas:** si la preferencia de cada votante entre X e Y se mantiene, pero cambian sus preferencias respecto a los otros candidatos, la Constitución no cambia el orden relativo entre X e Y .

Son muy pocas!

Teorema:

Teorema

Si \mathcal{S}_j son todos los posibles órdenes de j candidatos, una Constitución es una función

$$\mathcal{F} : \prod_{i=1}^n \mathcal{S}_j \rightarrow \mathcal{S}_j$$

y si \mathcal{F} satisface i.- y ii.-, entonces

$$\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) = x_k$$

Teorema:

Teorema

Si \mathcal{S}_j son todos los posibles órdenes de j candidatos, una Constitución es una función

$$\mathcal{F} : \prod_{i=1}^n \mathcal{S}_j \rightarrow \mathcal{S}_j$$

y si \mathcal{F} satisface i.- y ii.-, entonces

$$\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) = x_k$$

Esto duele mucho menos que decir:

Teorema

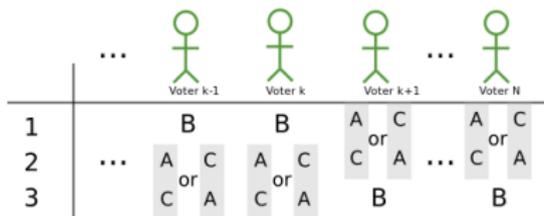
La única Constitución que satisface i.- y ii.- es la Dictadura: un único votante decide el orden social.

Demostración

Lema

Si un candidato está *primero* o *último* en cada voto, saldrá primero o último.

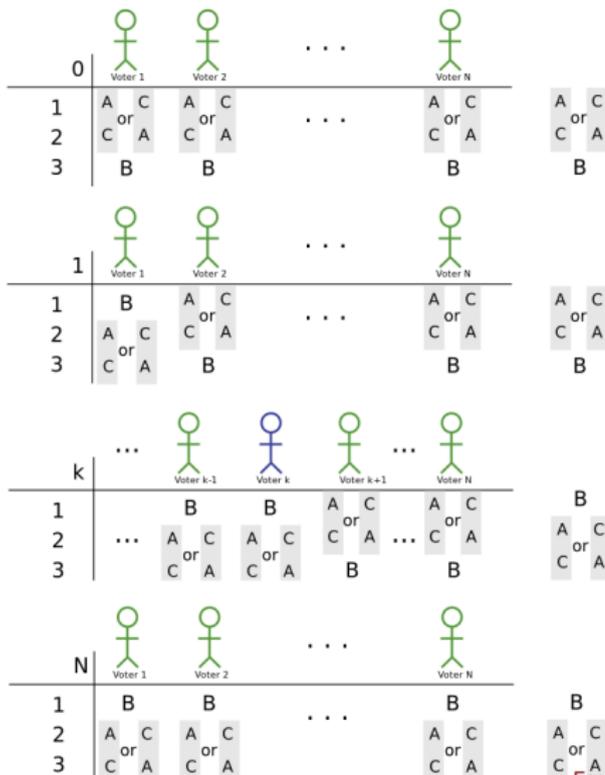
Demostración:



El orden entre A y B es el mismo que entre C y B para todos los votantes. Si en el orden social A le gana a B , C también; y si A pierde con B , C también.

Lema

Existe un votante clave para B .



Lema

El votante clave para B decide el orden de A , B , y C .

Lema

El votante clave para B decide el orden de A , B , y C .

Demostración:

- Si vota $A > B$, así queda en el orden social.

Lema

El votante clave para B decide el orden de A , B , y C .

Demostración:

- Si vota $A > B$, así queda en el orden social.

La relación entre A y B es la misma que cuando B está arriba para los votantes 1 al $k - 1$, y B debajo para los votantes $k + 1$ al n .

Lema

El votante clave para B decide el orden de A , B , y C .

Demostración:

- Si vota $A > B$, así queda en el orden social.

La relación entre A y B es la misma que cuando B está arriba para los votantes 1 al $k - 1$, y B debajo para los votantes $k + 1$ al n .

- Si vota $A < B$, así queda en el orden social.

La relación entre B y A es la misma que cuando B está arriba para los votantes 1 al k , y A arriba para los votantes $k + 1$ al n .

Lema

El votante clave para B decide el orden de A , B , y C .

Demostración:

- Si vota $A > B$, así queda en el orden social.

La relación entre A y B es la misma que cuando B está arriba para los votantes 1 al $k - 1$, y B debajo para los votantes $k + 1$ al n .

- Si vota $A < B$, así queda en el orden social.

La relación entre B y A es la misma que cuando B está arriba para los votantes 1 al k , y A arriba para los votantes $k + 1$ al n .

- Lo mismo ocurre con C y B .

Lema

El votante clave para B decide el orden de A , B , y C .

Demostración:

- Si vota $A > B$, así queda en el orden social.

La relación entre A y B es la misma que cuando B está arriba para los votantes 1 al $k - 1$, y B debajo para los votantes $k + 1$ al n .

- Si vota $A < B$, así queda en el orden social.

La relación entre B y A es la misma que cuando B está arriba para los votantes 1 al k , y A arriba para los votantes $k + 1$ al n .

- Lo mismo ocurre con C y B .

- Como el votante clave puede forzar $A - B - C$, también fuerza $A - C - B$ (A le tiene que ganar porque en $A - B - C$ le gana y sólo cambió B con C).

Observaciones

- Buscamos una situación donde hay un perfil de votos donde aparece un dictador (un candidato es el primero o el último de todos). En otros casos podría no haberlo.

Observaciones

- Buscamos una situación donde hay un perfil de votos donde aparece un dictador (un candidato es el primero o el último de todos). En otros casos podría no haberlo.
- Gil Kalai dio versiones cuantitativas.

Observaciones

- Buscamos una situación donde hay un perfil de votos donde aparece un dictador (un candidato es el primero o el último de todos). En otros casos podría no haberlo.
- Gil Kalai dio versiones cuantitativas.
- Cualquier regla se rompe para cierto número de candidatos (Nakamura number).

Observaciones

- Buscamos una situación donde hay un perfil de votos donde aparece un dictador (un candidato es el primero o el último de todos). En otros casos podría no haberlo.
- Gil Kalai dio versiones cuantitativas.
- Cualquier regla se rompe para cierto número de candidatos (Nakamura number).
- Estas preferencias son *ordinales*. Si fueran *cardinales* (asigno un puntaje a cada candidato, no sólo un orden), también hay problemas [Gibbard y Satherwaite ~ 1975]

Referencias:

- jpinasco@gmail.com y les mando las transparencias. Creo que el año que viene voy a dar Teoría de Juegos.

Referencias:

- jpinasco@gmail.com y les mando las transparencias. Creo que el año que viene voy a dar Teoría de Juegos.
- Martin Shubik, Game Theory in the Social Sciences, Vol. 1: Concepts and Solutions, Vol. 2: Approach to Political Economy, MIT Press 1985.

Referencias:

- jpinasco@gmail.com y les mando las transparencias. Creo que el año que viene voy a dar Teoría de Juegos.
- Martin Shubik, Game Theory in the Social Sciences, Vol. 1: Concepts and Solutions, Vol. 2: Approach to Political Economy, MIT Press 1985.
- Ken Binmore, Game Theory and the Social Contract, 1 & 2. MIT Press 2000. [ver también *Fun and Games* y *Playing for real*]

Referencias:

- jpinasco@gmail.com y les mando las transparencias. Creo que el año que viene voy a dar Teoría de Juegos.
- Martin Shubik, Game Theory in the Social Sciences, Vol. 1: Concepts and Solutions, Vol. 2: Approach to Political Economy, MIT Press 1985.
- Ken Binmore, Game Theory and the Social Contract, 1 & 2. MIT Press 2000. [ver también *Fun and Games* y *Playing for real*]
- Pablo Amster y JPP, Teoría de Juegos, Fondo de Cultura Económica, 2013.

Referencias:

- jpinasco@gmail.com y les mando las transparencias. Creo que el año que viene voy a dar Teoría de Juegos.
- Martin Shubik, Game Theory in the Social Sciences, Vol. 1: Concepts and Solutions, Vol. 2: Approach to Political Economy, MIT Press 1985.
- Ken Binmore, Game Theory and the Social Contract, 1 & 2. MIT Press 2000. [ver también *Fun and Games* y *Playing for real*]
- Pablo Amster y JPP, Teoría de Juegos, Fondo de Cultura Económica, 2013.
- Gráficos de Arrow by Nilesj - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=27989711>

Preguntas?

