Mergeable Min-heap

Una estructuras de datos H que soportan las siguientes operaciones.

- Make-heap() => H — crea un heap vacío
- Insert(H,x) — agrega un elemento x a heap H, x ya tiene un valor de key definido
- Minimum(H) => x — devuelve el elemento con valor mínimo de key dentro de H
- Extract-min(H) — borra el elemento mínimo de H
- Union(H_1,H_2) => H — crear un nuevo heap H que contiene todos los elementos de H_1 y H_2 (se destruyen)
- Decrease-key(H,x,k) — reemplaza el valor de key de x por k
- Delete(H,x) — borra el elemento x

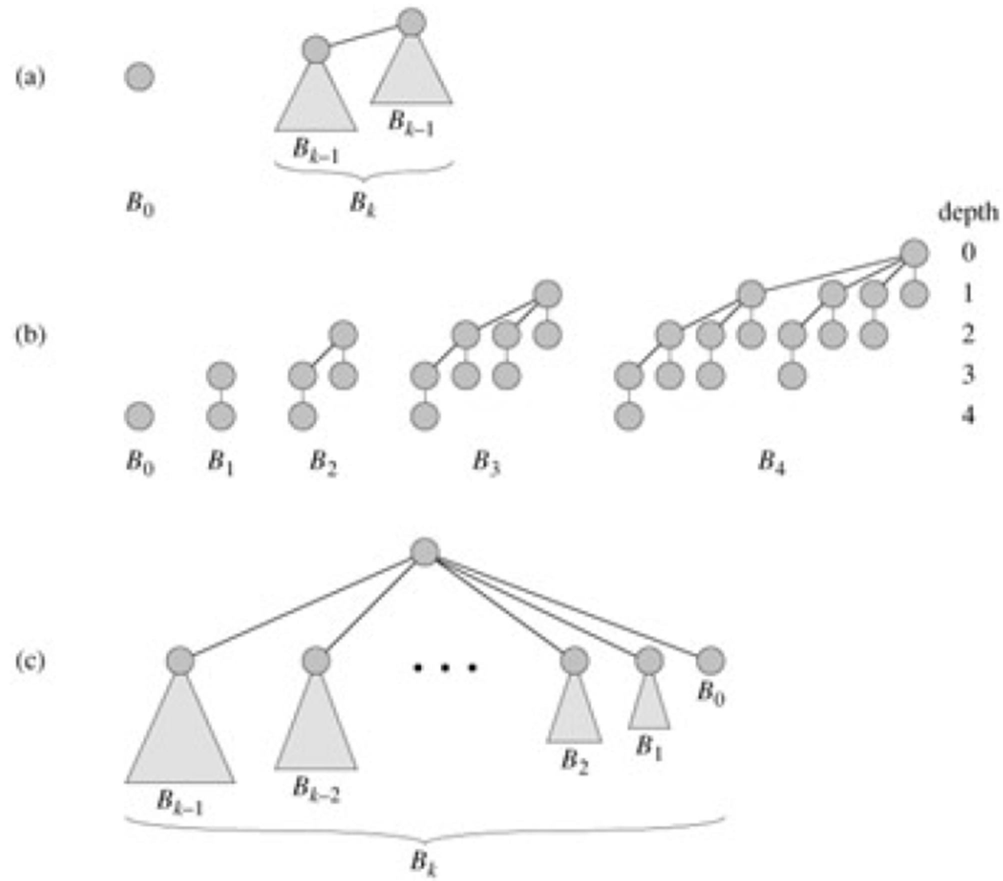
Observación:

Delete(H,x) se puede implementar usando Decrease-key(H,x,$-\infty$) y luego Extract-min(H)

- Mergeable Min-heap

Procedure	Binary heap (worst-case)	Binomial heap (worst-case)	Fibonacci heap (amortized)
MAKE-HEAP	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
INSERT	$\Theta(\lg n)$	$O(\lg n)$	$\Theta(1)$
MINIMUM	$\Theta(1)$	$O(\lg n)$	$\Theta(1)$
EXTRACT-MIN	$\Theta(\lg n)$	$\Theta(\lg n)$	$O(\lg n)$
UNION	$\Theta(n)$	$O(\lg n)$	$\Theta(1)$
DECREASE-KEY	$\Theta(\lg n)$	$\Theta(\lg n)$	$\Theta(1)$
DELETE	$\Theta(\lg n)$	$\Theta(\lg n)$	$O(\lg n)$

Binomial Trees



Binomial Trees

Dado un árbol binomial B_k

- **B_k tiene 2^k nodos**
- **B_k tiene altura k**
- **Tiene exactamente $\binom{k}{i}$ nodos del nivel i, para i=0,…,k**
- **La raíz tiene grado k (# de nodos hijos) y es mayor que el grado de cualquier otro nodo. Si enumeramos los hijos de izquierda a derecha con k-1, k-2,…,0, el hijo i es la raíz de un subárbol B_i.**

Se puede probar por inducción.

Como corolario, el grado máximo de cualquier nodo de un árbol binomial de n nodos es log n

Binomial Heap

Un binomial heap H es un conjunto árboles binomiales tal que satisface las siguientes propiedades:

1. Cada árbol binomial en H cumple propiedad de min-heap, la clave de cualquier nodo del árbol es por lo menos el valor de la clave del nodo padre.
2. Para cualquier entero positivo k, existe a lo sumo un árbol B_k en H (es decir un árbol binomial cuyo padre tiene grado k).

En consecuencia

- La clave del nodo raíz de cada árbol binomial es mínimo entre los nodos de su árbol.
- Un heap binomial H de n nodos, tiene a lo sumo $\lfloor \log n \rfloor + 1$ árboles binomiales, la representación binaria del número n utiliza a lo sumo $\lfloor \log n \rfloor + 1$ dígitos binarios. Sea d_i, el dígito binario i-ésimo menos significativo de n, si d_i = 1 entonces B_i está en H.