Problema de Grafos

Problemas de Grafos y Tratabilidad Computacional

Ejercicios

- Probar que los grafos clique-Helly hereditarios son exactamente los grafos que no tienen como subgrafos inducidos a los grafos oculares (3-sun,$\overline{3K_2}$,$\overline{P_4 + P_2}$,$\overline{E}$)
- Probar que son equivalentes las siguientes subclases de grafos.
  - localmente completo
  - P_3-free
  - unión de cliques/completos
- Probar que los grafos localmente independiente son exactamente los grafos sin triángulos
- Probar que un grafo localmente co-triangle-free si y sólo si es claw-free
- Probar que los grafos containment son exactamente los grafos de comparabilidad (admiten una orientación transitiva de sus aristas)

Ejercicios

- Probar que cualquier grafo es grafo intersección y grafo overlap
- Mostrar un grafo que no es containment/de comparabilidad
- Probar que los grafos cordales son weakly chordal
- Probar que los grafos de bloques (grafos intersección de los bloques de grafos) son exactamentes los grafos donde todos sus bloques son completos.
- Probar que los grafos de permutación son de comparabilidad y de co-comparabilidad (la vuelta también es cierta).
- Probar que los grafos split son cordales y co-cordales (vale la vuelta también).
- Probar que los grafos de intervalos son cordales y de co-comparabilidad (la vuelta también se cumple).
- Probar que cualquier grafo es grafo intersección de una familia donde cada miembro es la unión de uno o varios intervalos de una línea recta.

Resolución

Probar que los grafos clique-Helly hereditarios son exactamente los grafos que no tienen como subgrafos inducidos a los grafos oculares (3-sun,$\overline{3K_2}$,$\overline{P_4 + P_2}$,$\overline{E}$)

- Primero ver que cada uno de los grafos oculares no es clique-Helly. Si es cierto entonces cualquier grafo clique-Helly hereditario no puede contener a estos grafos como subgrafos inducidos.

Resolución

- Sea G un grafo lo más chico posible que no contiene a ninguno de los grafos oculares como subgrafo inducido y no es clique-Helly hereditario. Entonces G no es clique-Helly. Sea $F' = \{Q_1, Q_2, \cdots, Q_k\}$ una subfamilia de cliques de G intersecante minimalmente no Helly (es decir que no existe un vértice en común para todos los cliques de F' pero si se elimina cualquier clique Q_i de F', la subfamilia resultante que sigue siendo intersecante ahora todos sus cliques tienen un vértice en común). Claramente, $k \geq 3$. Tomamos las siguientes subfamilias de F', $F'(1) = F' \setminus \{Q_1\}, F'(2) = F' \setminus \{Q_2\}$ y $F'(k) = F' \setminus \{Q_k\}$. Sean a un vértice en común de los cliques de $F'(1)$, b uno de $F'(2)$ y c uno de $F'(k)$. Es fácil de observar que $Q_1 \cap \{a, b, c\} = \{b, c\}$, $Q_2 \cap \{a, b, c\} = \{a, c\}$ y $Q_k \cap \{a, b, c\} = \{a, b\}$. Por otro lado, $\{a, b, c\}$ es parte de un clique Q y $Q \neq Q_i$ para $i \in \{1, 2, k\}$. Por lo tanto, existen otros 3 vértices distintos v_1, v_2 y v_k tal que $v_1 \in Q_1$ no adyacente a a, $v_2 \in Q_2$ no adyacente a b y $v_k \in Q_k$ no adyacente a c. Claramente, $G[\{a, b, c, v_1, v_2, v_k\}]$ es un grafo

Resolución

ocular y es una contradicción.

Probar que los grafos containment son exactamente los grafos de comparabilidad (admiten una orientación transitiva de sus aristas)

- Ida. Sea G un grafo containment asociado a una familia de subconjuntos $F = \{S_1, \cdots, S_n\}$, un par de vértices v_i, v_j de G son adyacentes sii los subconjuntos correspondientes S_i, S_j verifican $S_i \subseteq S_j$ o $S_j \subseteq S_i$. Podemos orientar las aristas de G de la siguiente manera, sea (v_i, v_j) una arista de G, entonces queda $v_i \to v_j$ si $S_i \subseteq S_j$ sino sería $v_j \to v_i$ y en este caso $S_j \subseteq S_i$. Claramente la orientación resultante es transitiva ya que la relación de contención entre conjuntos también es transitiva.

Resolución

- Vuelta. Sea $G = (V, E)$ un grafo de comparabilidad y H una orientación transitiva de sus aristas. Para cada vértice $v \in V$, definimos $N_H^{out}(v) = \{w | v \to w \in H\} \cup \{v\}$. Ahora consideramos la familia F donde sus miembros son $N_H^{out}(v)$ para $v \in V$. Ver G es grafo containment de F.
  - (u, v) es una arista de E y sin pérdida de generalidad $u \to v \in H$. Veamos que $N_H^{out}(v) \subseteq N_H^{out}(u)$. Para cada vértice $z \in N_H^{out}(v)$ consideramos los siguientes subcasos.
    1. $z = v$, entonces $z = v \in N_H^{out}(u)$
    2. $z \neq v$ y $v \to z \in H$. Como H es transitiva entonces $u \to z \in H$ y $z \in N_H^{out}(u)$.

    Por lo cual, (u, v) es una arista del grafo containment de F.
  - (u, v) es una arista del grafo containment de F y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $N_H^{out}(v) \subseteq N_H^{out}(u)$ y en particular $v \in N_H^{out}(u)$. Por lo cual, $u \to v \in H$ y (u, v) es una arista de E.