Grafos Split

Problemas de Grafos y Tratabilidad Computacional

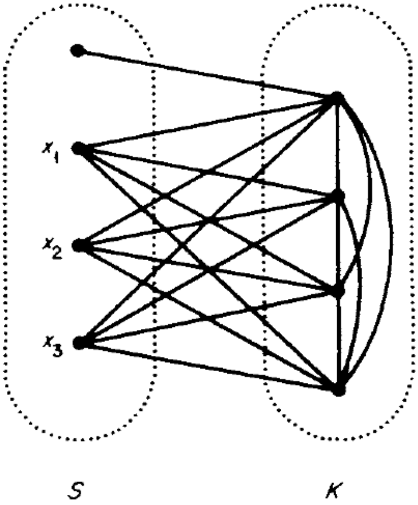
Definición

Un grafo $G = (V, E)$ es split si V se puede particiona en 2 subconjuntos de vértices S y K donde S es un conjunto independiente y K un completo. No hay restricción sobre las aristas interparticiones.

Observaciones

- Si G es un grafo split sii también lo es su grafo complemento $\overline{G}$.
- Un grafo split G puede tener más de una partición posible.
- Sean S un conjunto independiente y K un completo de un grafo G, entonces $|S \cap K| \leq 1$ ya que si $\{x, y\} \subseteq S \cap K$, x e y no pueden ser adyacentes por estar ambos en S y deben ser adyacentes por estar en K. Particularmente vale para $|S| = \alpha(G)$ y/o $|K| = \omega(G)$.

Un grafo split con varias particiones posibles



Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo split donde $\{S, K\}$ es una partición de los vértices de V, S es un conjunto independiente y K un completo. Entonces cumple exactamente una de las siguientes condiciones.

1. $|S| = \alpha(G)$ y $|K| = \omega(G)$ y además G no tiene otra partición.
2. $|S| = \alpha(G)$ y $|K| = \omega(G) - 1$ y además existe $x \in S$ tal que $\{x\} \cup K$ es completo.
3. $|S| = \alpha(G) - 1$ y $|K| = \omega(G)$ y además existe $y \in K$ tal que $\{y\} \cup S$ es conjunto independiente.

Demo: Sabemos que $|S| \leq \alpha(G)$, $|K| \leq \omega(G)$ y $\{S, K\}$ es una partición de V. Entonces $\alpha(G) + \omega(G) \geq |S| + |K| = |V|$. Por otro lado, sean S' un conjunto independiente máximo y K' un completo máximo de G, es decir que $|S'| = \alpha(G)$ y $|K'| = \omega(G)$. Claramente, $|S' \cap K'| \leq 1$ y $\alpha(G) + \omega(G) - 1 = |S'| + |K'| - 1 \leq |S' \cup K'| \leq |V|$. Por lo tanto, $|V| = |S| + |K| \leq \alpha(G) + \omega(G) \leq |V| + 1$. Si $\alpha(G) + \omega(G) = |V|$, entonces $|S| = \alpha(G)$, $|K| = \omega(G)$ y tendríamos la condición ppal. del caso (1). Si $\alpha(G) + \omega(G) = |V| + 1$, ocurre exactamente la condición ppal. de (2) o la de (3). Falta probar la condición adicional para cada caso.

1. Supongamos que existe otra partición distinta $\{S', K'\}$. Claramente, $\exists x$ tal que $\{x\} = S \cap K'$ sino $K' \subset K$ y $K' \neq K$ entonces $|K'| < |K|$ y $|S'| > |S| = \alpha(G)$, contradicción. Con un argumento similar, $\exists y$ tal que $\{y\} = K \cap S'$. En caso que $(x, y) \in E$, entonces $\{x\} \cup K$ es completo ya que $x \in K'$, el único vértice de K que está en S' es y y es vecino de x. El resto están en K'. Contracción por hallar un completo con más de $\omega(G)$ vértices. En caso que $(x, y) \notin E$, entonces $\{y\} \cup S$ es conjunto independiente pués $y \in S'$, el único vértice de S que está en K' es x el cual no es vecino de y. Los vértices restantes están en S'. También es contradicción por encontrar un conjunto independiente con más de $\alpha(G)$ vértices. Conclusión: no existe tal partición $\{S', K'\}'$.
2. Solamente vamos aprobar este caso ya que la prueba para el caso (3) es similar. Tenemos $|S| = \alpha(G)$ y $|K| = \omega(G) - 1$. Sea K' un completo de G con $\omega(G)$ vértices. Claramente, $\exists x$ tal que $\{x\} = S \cap K'$ pués $K' \setminus K \neq \emptyset$. Es más, $K' = \{x\} \cup K$.

Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. G es un grafo split.
2. G y $\overline{G}$ son grafos cordales.
3. G no contiene a $2K_2, C_4$ ni C_5 como subgrafo inducido.

- (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $\{S, K\}$ una partición de los vértices de V. Supongamos que G no es cordal y existe un C_k ciclo inducido en G con $k \geq 4$. Claramente, $|V(C_k) \cap K| \leq 2$ ya que C_k no contiene triángulos. En caso que $|V(C_k) \cap K| \leq 1$, entonces $V(C_k) \cap S$ induce C_k o P_{k-1} y en cualquiera de ellos, tiene aristas entonces S no es conjunto independiente. Lo cual es contradicción. Si $V(C_k) \cap K = \{x, y\}$ entonces (x, y) es una arista de C_k y $V(C_k) \cap S$ induce un P_{k-2} que también contiene arista. Nuevamente, S no sería conjunto independiente y resulta otra vez contradicción. Por lo tanto, G es cordal. Como $\overline{G}$ es split también entonces $\overline{G}$ es cordal.

- (2) $\Rightarrow$ (3) G no contiene a C_4 ni C_5 como subgrafo inducido por ser cordal. $\overline{G}$ no contiene a C_4 como subgrafo inducido por ser cordal también. Entonces $\overline{C_4} = 2K_2$ no puede ser subgrafo inducido de G.
- (3) $\Rightarrow$ (1) Sea K un clique máximo elegido de manera tal que $S = V \setminus K$, $G[S]$ tenga menos aristas posibles. Queremos probar que S es un conjunto independiente. Supongamos que no lo es, $\exists x, y \in S$ tal que $(x, y) \in E$. Como K es clique, no hay vértice de S sea adyacente a todos los de K. Es más, si tanto x como y es adyacente a todos los vértices de K salvo un mismo vértice z. Entonces $K \cup \{x, y\} \setminus \{z\}$ sería en clique mayor,contradicción. Por tanto existen $u, v \in K, u \neq v$ y $(x, u), (y, v) \notin E$. Como G no contiene a C_4 ni $2K_2$, exactamente está una de las siguientes posibles aristas: (x, v) e (y, u). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $(y, u) \in E$ y $(x, v) \notin E$. Para cada $w \in K \setminus \{u, v\}$, si $(x, w), (y, w) \notin E$ entonces $G[\{x, y, v, w\}] \cong 2K_2$, pero si $(y, w) \notin E$ y $(x, w) \in E$ entonces $G[\{x, y, u, w\}] \cong C_4$. Por lo tanto y es adyacente a todos los vértices de $K \setminus \{v\}$ y

$K' = K \cup \{y\} \setminus \{v\}$ is un clique. Como $G \setminus K'$ no puede tener menos aristas que $G \setminus K = G[S]$, (x, y) está en $G[S]$ pero en su lugar (x, v) no es arista de $G \setminus K'$. Para compensar, debe existir un vértice $t \neq y$ en S tal que $(t, v) \in E$ y $(t, y) \notin E$. Ahora t y x deben ser adyacentes sino $\{t, v, x, y\}$ induce un $2K_2$. Similarmente, t y u no son adyacentes sino $\{t, x, y, u\}$ induce un C_4. Sin embargo, $\{t, x, y, u, v\}$ induce un C_5, una contradicción. Por lo tanto, S es conjunto independiente y G es grafo split.

Ejercicio de Secuencia Gráfica de Algo III

5.13. La secuencia $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ se dice gráfica si hay un grafo simple con secuencia de grados D.

a. Mostrar que $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$ y $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$ no son secuencias gráficas.

b. Si D es una secuencia gráfica tal que $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ entonces:
$\sum_{i=1}^{n} d_i$ es par y
$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i)$ para $1 \leq k \leq n$.
Nota: Se puede probar que esta condición es también suficiente para que una secuencia sea gráfica.

Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo con secuencia gráfica $D = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ donde $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$, y sea $m = max\{i / d_i \geq i - 1\}$. Entonces, G es grafo split sii

$$\sum_{i=1}^{m} d_i = m \times (m-1) + \sum_{i=m+1}^{n} d_i. \quad (1)$$

Es más, si este es el caso, entonces $\omega(G) = m$.

- $\Rightarrow$) G es grafo split, por el primer teorema sabemos que existe una partición $\{S, K\}$ de V donde $|K| = \omega(G)$. Entonces $\forall v \in K, d(v) \geq \omega(G) - 1$ y $\forall w \in S, d(w) \leq \omega(G) - 1$. Entonces $d_1, \cdots, d_{\omega(G)}$ corresponden a los grados de vértices de K, ordenados de mayor a menor y $d_{\omega(G)+1}, \cdots, d_n$ corresponden a los grados de vértices de S, también ordenados de mayor a menor. Además, $m = \omega(G)$ pués $d_{\omega(G)} \geq \omega(G) - 1$ y $\forall i \geq \omega(G) + 1, d_i \leq \omega(G) - 1 < \omega(G) \leq i - 1$. Es claro que se verifica la ecuación (1) ya que la suma de grado de los vértices de K es la suma de 2 veces la cantidad de aristas de K $(m \times (m-1))$ y una vez las aristas interparticiones (que es la suma de grados de vértices de S).

- $\Leftarrow$) Sea v_i el vértice de V que corresponde a d_i ($d(v_i) = d_i$) para $1 \leq i \leq n$. Entonces definimos $K = \{v_1, \cdots, v_m\}$ y $S = \{v_{m+1}, \cdots, v_n\}$. La suma de grados de los vértices de K es la suma de A (la suma de cantidad de vecinos en K de cada vértice de K) y B (la suma de cantidad de vecinos en S de cada vértice de K). Lo mismo ocurre con la suma de grados de los vértices de S es la suma de C (la suma de cantidad de vecinos en S de cada vértice de S) y F (la suma de cantidad de vecinos en K de cada vértice de S). Claramente, $B = F$ ya que ambos cuentan la cantidad de aristas que tienen un extremo en K y el otro en S. Por otro lado, $m \times (m-1)$ es una cota superior de A ya que la cantidad de vecinos en K de un vértice de K es a lo sumo $m-1$. Entonces tenemos $\sum_{i=1}^{m} d_i = A + B = A + F \leq m \times (m-1) + F \leq m \times (m-1) + C + F = m \times (m-1) + \sum_{i=m+1}^{n} d_i$. Por hipótesis, sabemos que $\sum_{i=1}^{m} d_i = m \times (m-1) + \sum_{i=m+1}^{n} d_i$. Entonces, se puede reemplazar toda desigualdad «$\leq$» por igualdad «$=$». Tenemos $A = m \times (m-1)$ y $C = 0$ que significa K es completo y S es conjunto independiente, respectivamente. G es grafo split.