

# Planaridad

Martín D. Safe

Instituto de Cálculo, Universidad de Buenos Aires

Tópicos Fundamentales en Teoría de Grafos  
2.º semestre 2018

# Grafos planares

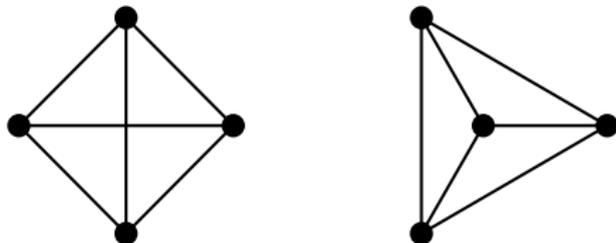
## Grafos planares

Un grafo  $G$  se dice **planar** si admite una representación donde:

- 1 los vértices de  $G$  son puntos distintos del plano; y
- 2 cada arista es una curva simple en el plano que conecta dos vértices de  $G$  y tal que su interior es disjunto de otros vértices y aristas.

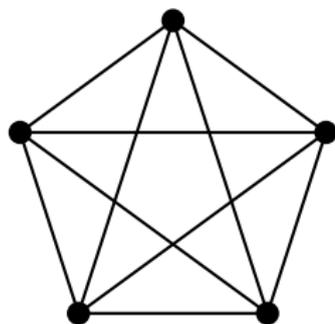
Una tal representación se llama una **representación plana**.

## Ejemplo

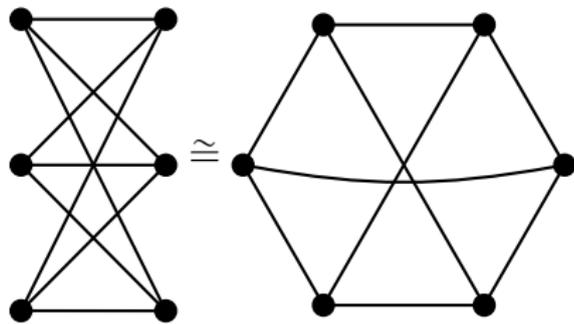


# Grafos no planares

## Ejemplos de grafos no planares



$K_5$



$K_{3,3}$

Supongamos que alguno de ellos fuera planar y consideremos una representación plana del mismo. Sea  $C$  un ciclo generador y consideramos sus cuerdas. Dos cuerdas están **en conflicto** si sus extremos ocurren alternadamente en el ciclo. Cuando dos cuerdas están en conflicto, debemos dibujar una en el interior de  $C$  y la otra en el exterior de  $C$ . Esto es imposible para ambos grafos.

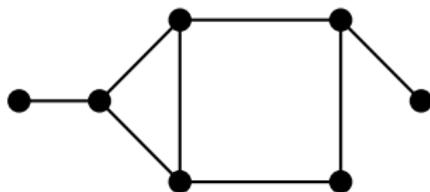
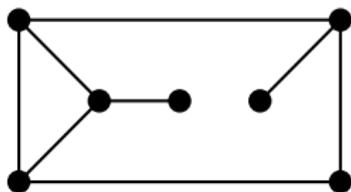
# Grafos planares exteriores

## Grafo planar exterior

Un grafo es **planar exterior** (en inglés: outerplanar) si tiene una representación plana con todos los vértices en la frontera de la región exterior (i.e., la región no acotada entre aquellas en las que divide al plano).

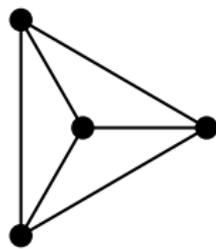
Una **representación plana exterior** es una tal representación plana de un grafo planar exterior.

## Ejemplo

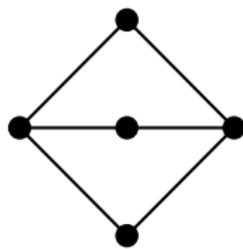


# Grafos planares exteriores

## Grafos planares no planares exteriores



$K_4$



$K_{2,3}$

- ▶ La frontera de la región exterior de una representación plana exterior de un grafo 2-conexo es un ciclo (generador). En efecto, si no fuese un ciclo entonces se repetiría un vértice, el cual deberá ser un vértice de corte.
- ▶  $K_{2,3}$  no tiene un ciclo generador porque es bipartito y tiene 5 vértices.
- ▶ Todo ciclo generador de  $K_4$  tiene dos cuerdas en el conflicto, por lo que no pueden estar ambas en su interior.

## Curvas y poligonales

El estudio de grafos planares involucra necesariamente resultados sobre la topología del plano. No nos preocuparemos mayormente por cuestiones topológicas y seguiremos en enfoque ingenuo. En cambio haremos hincapié en los aspectos combinatorios, que son aquellos de nuestro interés.

Para evitar algunas de las complicaciones topológicas, argumentaremos que es posible limitarse a representaciones gráficas en las que aristas son poligonales simples.

### Curva

Una **curva** es la imagen de una función continua  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ; se dice **simple** si no repite puntos salvo quizá el primero con el último.

### Poligonal

Una **poligonal** es una curva compuesta de un número finito de segmentos de recta; se la llama una **x, y-poligonal** si empieza en  $x$  y termina en  $y$ .

# Poligonales

## Lema

Si  $U$  es un conjunto abierto del plano y  $x, y \in U$  están unidos mediante una curva simple en  $U$ , entonces  $x$  e  $y$  están unidos por una poligonal simple en  $U$ .

## Bosquejo de la demostración.

Sea  $C$  la imagen de una curva simple que une  $x$  con  $y$  en  $U$ . Como  $U$  es abierto, para cada  $z \in C$  existe una bola abierta  $B_z$  con centro en  $z$  contenida en  $U$ . Como  $C$  es un compacto, el cubrimiento abierto  $\{B_z : z \in C\}$  admite un subcubrimiento finito  $\mathcal{C} = \{B_{z_1}, \dots, B_{z_k}\}$ . Agregamos  $B_x$  y  $B_y$  a  $\mathcal{C}$  si no están ya en él. Es posible formar una  $x, y$ -poligonal uniendo entre sí centros de dichas bolas. Finalmente, es posible eliminar las auto-intersecciones hasta obtener una  $x, y$ -poligonal simple. □

# Poligonales

## Teorema

Si  $G$  es un grafo planar entonces  $G$  admite una representación plana en la que todas sus aristas se representan por poligonales simples.

## Bosquejo de la demostración.

Sea  $G'$  una representación plana de  $G$ . Para cada vértice  $p$  de  $G'$ , sea  $\overline{B}_p$  una bola cerrada con centro  $p$  que interseca solo aquellas arista incidentes en  $p$ . Más aún, supongamos que  $\overline{B}_p \cap \overline{B}_q = \emptyset$  para todo par de vértices distintos  $p$  y  $q$  de  $G'$ . Sea  $C_{pq}$  la parte de la arista  $pq$  de  $G'$  que une  $\overline{B}_p$  con  $\overline{B}_q$  y tiene solo sus extremos en común con  $\overline{B}_p$  y  $\overline{B}_q$ . Ahora podemos hallar otra representación plana de  $G$  tal que las partes de las aristas en las bolas  $\overline{B}_p$  son segmentos de rectas. Usando el lema anterior, es posible reemplazar cada uno de los arcos  $C_{pq}$  por una poligonal simple.  $\square$

# Dibujo de un grafo

## Dibujo de un grafo. Cruzamientos.

Un **dibujo** de un grafo  $G$  es una función  $f$  definida en  $V(G) \cup E(G)$  tal que a cada vértice  $v$  asigna un punto distinto  $f(v)$  en el plano y a cada arista con extremos  $u, v$  asigna una  $f(u), f(v)$ -poligonal. Si  $e$  y  $e'$  son aristas, un punto en  $f(e) \cap f(e')$  que no es un extremo común se llama un **cruzamiento**.

## Inmersión plana

Una **inmersión plana** de un grafo  $G$  es un dibujo sin cruzamientos.

## Observación

De acuerdo a esta definición y el teorema anterior, un grafo es planar si y sólo si admite una inmersión plana.

## Dibujo de un grafo

- ▶ Es común usar el mismo nombre para un grafo  $G$  y para un dibujo particular del mismo, llamando a los puntos y curvas en el dibujo por los nombres de los vértices y las aristas de  $G$ .
- ▶ Moviendo ligeramente las aristas podemos asegurar que no hay tres aristas que tengan un punto interior en común, que ninguna arista pasa por un vértice que no sea su extremo y que dos aristas no sean tangentes.
- ▶ Si dos aristas se cruzan más de una vez, entonces es posible modificarlas reduciendo el número de cruzamientos, por lo que requerimos que las aristas se crucen a lo sumo una vez.
- ▶ Consideramos solo dibujos con estas propiedades.

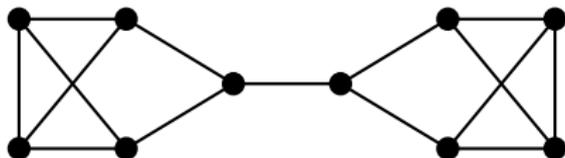
# Grafos planos

## Grafos planos

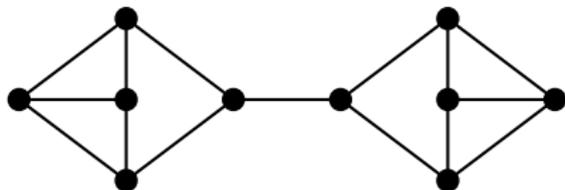
Un **grafo plano** es una inmersión plana particular de un grafo planar.

## Ejemplo

¿El siguiente grafo es planar?



Sí, porque admite el siguiente dibujo, que es un grafo plano:



# Caras

Un grafo plano divide el plano en partes. Estas partes son objetos fundamentales para el estudio de los grafos planares y planos.

## Región

Una **región** es un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  que contiene una  $u, v$ -poligonal para todo par de vértices  $u, v \in U$ .

## Cara

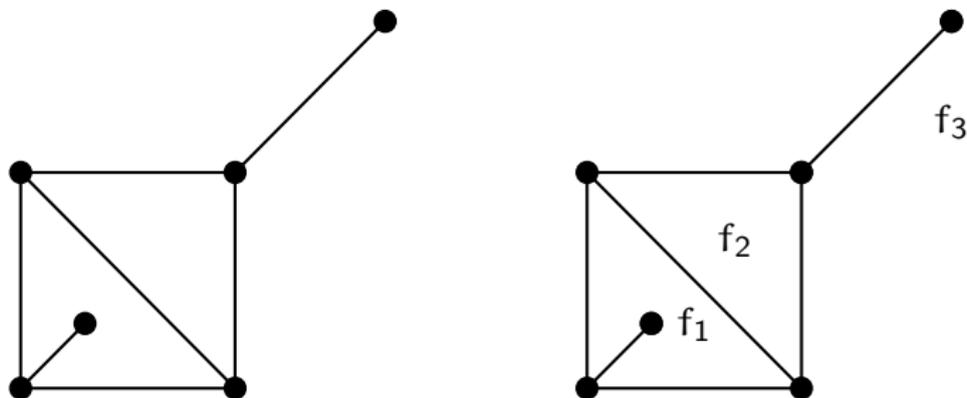
Las **caras** de un grafo plano son las regiones maximales del plano que no contienen puntos usados en vértices o aristas de dicha inmersión.

## Observaciones

- ▶ Toda inmersión plana de un grafo (finito) es un compacto y, luego, tiene una única cara no acotada, llamada **cara exterior**.
- ▶ Las caras son disjuntas dos a dos.
- ▶ Los puntos  $p, q \in \mathbb{R}^2$  que no son parte de la inmersión, están en la misma cara si y sólo si existe una  $p, q$ -poligonal que no cruza ninguna arista.

# Caras

## Ejemplo



Las caras son  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$ . La cara  $f_3$  es la cara exterior.

# Teorema de la curva de Jordan para poligonales

## Curva cerrada

Una curva se dice **cerrada** si su primer y su último punto coinciden.

En un grafo plano, cada ciclo está representado como una curva simple cerrada. Algunas caras yacen dentro de él y las demás fuera del mismo.

Esto se debe al hecho que una curva simple cerrada divide el plano en dos conjuntos abiertos arcoconexos disjuntos, resultado conocido como **Teorema de la curva de Jordan** (Jordan, 1887).

Para nuestros fines es suficiente la versión para poligonales que es más sencilla de probar.

## Teorema de la curva de Jordan para poligonales

Una poligonal simple cerrada  $C$  particiona el plano en exactamente dos caras, cada una de las cuales tiene a  $C$  como su frontera.

# Grafos duales

## Grafo dual

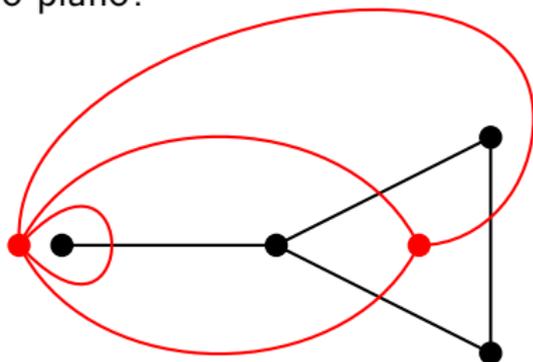
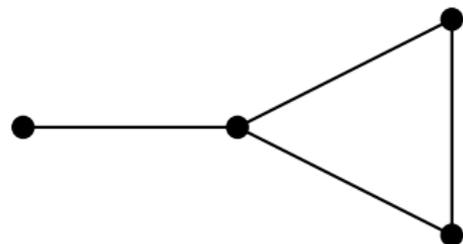
Un **grafo dual**  $G^*$  de un grafo plano  $G$  es un grafo plano obtenido de la siguiente forma:

- 1 para cada cara  $X$  de  $G$  ubicamos un **vértice dual**  $x$  en el interior de  $X$ , de manera que cada cara de  $G$  contiene exactamente un vértice de  $G^*$ ; y
- 2 para cada arista  $e$  en la frontera de cada cara  $X$ , dibujamos una curva de  $x$  a un punto de  $e$  cuyo interior está contenido en  $X$ , de manera que dichas curvas no se crucen dentro de  $X$  y tal que cada tal curva se encuentra con otra del otro lado de  $e$  en el mismo punto de  $e$ .

# Grafos duales

## Ejemplo

¿Cómo es un dual del siguiente grafo plano?



## Más ejemplos

- ▶ Toda inmersión plana de  $K_4$  tiene cuatro caras y sus fronteras comparten aristas entre sí. Luego, su dual es otra copia de  $K_4$ .
- ▶ Toda inmersión plana del cubo  $Q_3$  tiene ocho vértices, 12 aristas y seis caras. Las caras opuestas no tienen frontera común; el dual es una inmersión plana de  $K_{2,2,2}$ , que tiene seis vértices, 12 aristas y ocho caras.

# Grafos duales

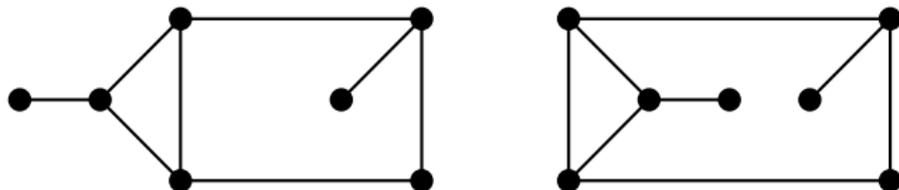
## Observaciones

- ▶ Como acabamos de ver, un grafo plano simple puede generar bucles y aristas múltiples en su dual.
- ▶ Una arista de corte de  $G$  se vuelve un bucle en  $G^*$  porque las caras a ambos lados de ella son la misma.
- ▶ Las aristas múltiples surgen en el dual cuando distintas caras tienen en su frontera común más de una arista.
- ▶ Los grafos duales son siempre conexos.
- ▶ Es posible probar que  $(G^*)^*$  es isomorfo a  $G$  si y sólo si  $G$  es conexo.

## Grafos duales

Dos inmersiones de un mismo grafo planar pueden tener duales no isomorfos.

### Ejemplo



En la inmersión de la derecha, el vértice del dual correspondiente a la cara exterior tiene grado 4. En la de la izquierda, ningún vértice del dual tiene grado 4.

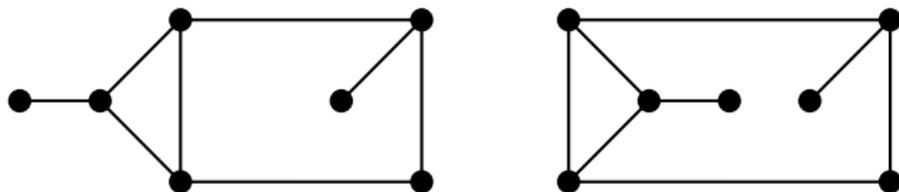
## Longitud de una cara

Cuando un grafo es conexo, la frontera de cada cara es un paseo cerrado. Cuando el grafo es desconexo, hay caras cuya frontera consiste en más de un paseo cerrado.

## Longitud de una cara

La **longitud** de una cara de un grafo plano  $G$  es la longitud total de los paseos cerrados en  $G$  en la frontera de dicha cara.

## Ejemplos



Una arista de corte pertenece a la frontera de una sola cara y contribuye en dos unidades a su longitud. En la inmersión de la izquierda, las longitudes de las caras son 3, 6 y 7; las longitudes de las caras de la inmersión de la derecha son 3, 9 y 4.

# Grafo dual

## Proposición

Si  $F_1, \dots, F_k$  son las caras de un grafo plano  $G$  y  $\ell(F)$  denota la longitud de la cara  $F$  entonces

$$2|E(G)| = \sum_{i=1}^k \ell(F_i).$$

## Demostración.

Las longitudes de las caras son los grados de los vértices duales. Como  $|E(G)| = |E(G^*)|$ , el resultado se sigue por el lema del apretón de manos aplicado a  $G^*$ :

$$2|E(G)| = 2|E(G^*)| = \sum_{v \in V(G^*)} d_{G^*}(v) = \sum_{i=1}^k \ell(F_i). \quad \square$$

## Grafo dual y Teorema de los cuatro colores

Sea  $G$  un grafo plano conexo, sin bucles ni aristas de corte.

Podemos interpretar un coloreo de las caras de  $G$  como un coloreo propio de  $G^*$ . En efecto, las aristas de  $G^*$  representan la frontera compartida entre distintas caras de  $G$ . Por lo tanto el mínimo número de colores necesarios para colorear propiamente las caras de  $G$  es igual al número cromático de  $G^*$ .

Como el dual del dual de  $G$  es el propio  $G$ , cuatro colores alcanzan para pintar las regiones de todo mapa plano si y sólo si todo grafo planar tiene número cromático a lo sumo 4.

# Grafos bipartitos planares

## Teorema

Si  $G$  es un grafo plano, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1  $G$  es bipartito;
- 2 toda cara de  $G$  tiene longitud par;
- 3 el grafo dual  $G^*$  de  $G$  es euleriano.

## Demostración.

Que 1 implica 2 es inmediato porque la frontera de toda cara es la unión de paseos cerrados y en un grafo bipartito todo paseo cerrado es par. Para la recíproca, consideremos un ciclo  $C$  cualquiera de  $G$ . Sea  $F$  la región encerrada por la curva simple cerrada que representa  $C$  en el grafo plano  $G$ . Toda cara de  $G$  está contenida en  $F$  o es disjunta con  $F$ . (...)

# Grafos planares bipartitos

## Demostración (cont.)

Si sumamos todas las longitudes de todas las caras contenidas en  $F$  obtenemos un número par, porque estamos asumiendo que todas las caras tienen longitud par. Como en dicha suma todas las aristas se cuentan dos veces, salvo aquellas de  $C$ , que se cuentan exactamente una vez cada una, la cantidad de aristas de  $C$  es par. Como  $C$  era un ciclo arbitrario de  $G$ ,  $G$  es bipartito.

La equivalencia entre ② y ③ se sigue del teorema de Euler de caracterización de grafos eulerianos ya que  $G^*$  es conexo y los grados de los vértices de  $G^*$  son las longitudes de las caras de  $G$ .



# Fórmula de Euler

## Teorema (Euler, 1758)

Si  $G$  es un grafo plano conexo con  $n$  vértices,  $e$  aristas y  $f$  caras entonces

$$n - e + f = 2.$$

## Demostración.

Por inducción en el número de aristas.

Si  $e = 0$  entonces  $G$  consiste en un único vértice y una sola cara (la exterior). Por lo tanto,

$$n - e + f = 1 - 0 + 1 = 2.$$

Sea  $e \geq 1$  y supóngase que la fórmula vale para grafos con  $e - 1$  aristas. Sea  $G$  un grafo con  $e$  aristas y sea  $\alpha$  una arista cualquiera de  $G$ . (...)

# Fórmula de Euler

## Demostración (cont.)

Aparecen dos casos:

- ▶ **Caso 1:**  $\alpha$  es una arista de corte.

Sean  $G_1$  y  $G_2$  las dos componentes de  $G - \alpha$ . Si  $n_1$ ,  $e_1$  y  $f_1$  son las cantidades de vértices, aristas y caras de  $G_1$ , respectivamente, y  $n_2$ ,  $e_2$  y  $f_2$  las cantidades de vértices, aristas y caras de  $G_2$ , respectivamente, entonces

$$n = n_1 + n_2, \quad e = e_1 + e_2 + 1 \quad \text{y} \quad f = f_1 + f_2 - 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned}n - e + f &= n_1 + n_2 - e_1 - e_2 - 1 + f_1 + f_2 - 1 \\ &= (n_1 - e_1 + f_1) + (n_2 - e_2 + f_2) - 2 \\ &=_{\text{HI}} 2 + 2 - 2 = 2.\end{aligned}$$

(...)

# Fórmula de Euler

## Demostración (cont.)

- ▶ **Caso 2:**  $\alpha$  no es una arista de corte.

Entonces  $\alpha$  pertenece a un ciclo y tiene a ambos lados dos caras distintas de  $G$ . Por lo tanto, si  $n'$ ,  $e'$  y  $f'$  son las cantidades de vértices, aristas y caras de  $G - \alpha$ , respectivamente, tenemos que:

$$n = n', \quad e = e' + 1 \quad \text{y} \quad f = f' + 1.$$

Además, como  $G$  es conexo y  $\alpha$  no es de corte entonces  $G - \alpha$  es también conexo. Finalmente,

$$n - e + f = n' - e' - 1 + f' + 1 = n' - e' + f' \stackrel{\text{HI}}{=} 2. \quad \square$$

# Fórmula de Euler

## Corolario

Todas las inmersiones planas de un grafo planar conexo tienen el mismo número de caras:  $f = e - n + 2$ .

## Observaciones

- ▶ Los duales de todas las inmersiones planas de un mismo grafo planar conexo tienen todas el mismo número de vértices.
- ▶ La fórmula de Euler se generaliza para grafos con  $k$  componentes:  $n - e + f = k + 1$ .

## Ejemplo

¿Cuántas caras tienen todas las representaciones planas de cualquier grafo cúbico planar conexo con 10 vértices?

El número de vértices es  $n = 10$ . El número de aristas queda determinado por el lema del apretón de manos,  $2e = 3n = 30$ , es decir,  $e = 15$ . Por el corolario,  $f = e - n + 2 = 15 - 10 + 2 = 7$ .

# Grafos planares maximales

## Teorema

Si  $G$  es un grafo planar simple con exactamente  $n$  vértices y  $e$  aristas y  $n \geq 3$  entonces

$$e \leq 3n - 6.$$

Mas aún, si  $G$  es libre de triángulos entonces  $e \leq 2n - 4$ .

## Demostración.

Alcanza con probarlo para el caso en que  $G$  es conexo; de lo contrario podemos agregar aristas hasta hacerlo conexo. Para obtener una relación entre  $e$  y  $n$  nos desharemos de  $f$  en la fórmula de Euler.

Como  $n \geq 3$  y  $G$  es simple, la frontera de cada cara en una inmersión cualquiera de  $G$  contiene al menos tres aristas. Si  $l_1, \dots, l_f$  es una enumeración de las longitudes de las caras entonces  $2e = l_1 + \dots + l_f \geq 3f$ . (...)

## Grafos planares maximales

### Demostración (cont.)

Luego, como  $G$  es conexo y el corolario anterior,

$$e - n + 2 = f \leq \frac{2e}{3}.$$

Esto implica que

$$3e - 3n + 6 \leq 2e.$$

Equivalentemente,

$$e \leq 3n - 6.$$

Cuando  $G$  es libre de triángulos, cada cara tiene longitud al menos 4. Entonces  $2e = \ell_1 + \dots + \ell_f \geq 4f$ . Luego,  $e - n + 2 = f \leq e/2$ . De donde  $2e - 2n + 4 \leq e$ ; es decir,  $e \leq 2n - 4$ .  $\square$

# Grafos planares maximales

## Corolario

Los grafos  $K_5$  y  $K_{3,3}$  son no planares.

## Demostración.

Se sigue de inmediato del corolario anterior que  $K_5$  y  $K_{3,3}$  no son planares porque tienen demasiadas aristas.

- ▶ Para  $K_5$  tenemos que  $e = 10 > 9 = 3n - 6$ , lo que contradice el teorema anterior.
- ▶ De forma similar, a pesar de que  $K_{3,3}$  no tiene triángulos por ser bipartito, tenemos que  $e = 9 > 8 = 2n - 4$ , contradiciendo también al teorema anterior.  $\square$

## Grafo planares maximales y triangulaciones

Un **grafo planar maximal** es un grafo planar simple que no es un subgrafo generador de otro grafo planar.

Una **triangulación** es un grafo plano simple en el que cada cara es un ciclo de 3 vértices.

# Grafos planares maximales

## Proposición

Para un grafo plano  $G$  simple con  $n \geq 3$  vértices, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1  $G$  tiene  $3n - 6$  aristas;
- 2  $G$  es una triangulación;
- 3  $G$  es un grafo plano maximal.

## Demostración.

Para probar la equivalencia entre 1 y 2, observamos que se sigue de la demostración del teorema anterior que  $e = 3n - 6$  si y sólo si  $2e = 3f$ , lo cual es equivalente a que la frontera de cada cara es un ciclo de 3 vértices.

La equivalencia entre 2 y 3 se sigue de que  $G$  posee una cara cuya frontera tiene longitud mayor que 3 si y sólo si es posible agregar una arista para obtener un nuevo grafo plano. □

## Poliedros regulares

Informalmente, podemos pensar un poliedro regular como un sólido cuyas caras consisten en polígonos regulares todos de la misma cantidad de lados y con el mismo número de aristas en cada vértice. Cuando proyectamos el poliedro hacia una esfera y lo proyectamos sobre un plano (proyección estereográfica), obtenemos un grafo plano regular con caras todas de la misma longitud. Por lo tanto, su dual también es un grafo regular.

Sea  $G$  un grafo plano con  $n$  vértices,  $e$  aristas y  $f$  caras.

Supongamos que  $G$  es conexo,  $k$ -regular y que todas las caras tienen longitud  $\ell$  donde  $k, \ell \geq 3$ . El lema del apretón de manos aplicado a  $G$  y  $G^*$  nos da  $kn = 2e = \ell f$ . Reemplazando  $n$  y  $f$  en la fórmula de Euler obtenemos  $2 = n - e + f = e(2/k - 1 + 2/\ell)$ .

Como  $2$  y  $e$  son positivos, el otro factor debe también ser positivo; es decir,  $2/k + 2/\ell > 1$ . Equivalentemente,  $(k - 2)(\ell - 2) < 4$ .

## Poliedros regulares

Las únicas soluciones de  $(k - 2)(\ell - 2) < 4$  para enteros  $k, \ell \geq 3$  son:

$k$	$\ell$	$(k - 2)(\ell - 2)$	$e$	$n$	$f$
3	3	1	6	4	4
3	4	2	12	8	6
4	3	2	12	6	8
3	5	3	30	20	12
5	3	3	30	12	20

Estas soluciones corresponden a los cinco sólidos platónicos: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro, respectivamente.

## Teorema de Kuratowski

Una **subdivisión de un grafo  $H$**  es un grafo que se obtiene subdividiendo cero o más veces algunas aristas de  $H$ .

### Lema

Si un grafo tiene un subgrafo que es una subdivisión de  $K_5$  o  $K_{3,3}$  entonces  $G$  no es planar.

### Demostración.

Como todo subgrafo de un grafo planar es planar, alcanza con probar que las subdivisiones de  $K_5$  y  $K_{3,3}$  no son planares. En efecto, si alguna subdivisión de  $K_5$  o  $K_{3,3}$  fuera planar entonces las curvas de una inmersión plana de dicha subdivisión se podrían usar para obtener una inmersión plana de  $K_5$  o  $K_{3,3}$ , absurdo.  $\square$

Kazimierz Kuratowski (1930) probó que la propiedad de no contener subdivisiones de  $K_5$  y  $K_{3,3}$  caracteriza los grafos planares.

### Teorema (Kuratowski, 1930)

Un grafo es planar si y sólo si no contiene una subdivisión de  $K_5$  ni de  $K_{3,3}$ .

# Teorema de Kuratowski

## Subgrafo de Kuratowski

Un **subgrafo de Kuratowski** de  $G$  es un subgrafo de  $G$  que es una subdivisión de  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .

## Grafo minimalmente no planar

Un **grafo minimalmente no planar** es un grafo no planar tal que todo subgrafo propio es planar.

Obtendremos una demostración del Teorema de Kuratowski probando las siguientes dos afirmaciones:

- ▶ todo grafo minimalmente no planar sin subgrafos de Kuratowski debe ser 3-conexo;
- ▶ todo grafo 3-conexo sin subgrafos de Kuratowski es planar.

# Teorema de Kuratowski

## Lema

Si  $F$  es el conjunto de aristas de una cara de una inmersión plana de  $G$  entonces  $G$  tiene una inmersión plana donde  $F$  es el conjunto de aristas de la cara exterior.

## Demostración.

Proyectamos la inmersión en la esfera, donde los conjuntos de aristas de las regiones se preservan y todas las regiones son acotadas. Luego proyectamos estereográficamente sobre el plano desde un punto en el interior de la región sobre la esfera cuya frontera está formada por las aristas de  $F$ . □

Para los lemas que siguen, necesitamos la siguiente definición.

## Lóbulos

Si  $S$  es un conjunto de vértices de un grafo  $G$ , se llama **S-lóbulo de  $G$**  a cada uno de los subgrafos de  $G$  inducidos por la unión entre  $S$  y el conjunto de vértices de alguna componente de  $G - S$ .

# Teorema de Kuratowski

## Lema

Todo grafo minimalmente no planar es 2-conexo.

## Demostración.

Sea  $G$  un grafo minimalmente no planar. El grafo  $G$  no puede ser desconexo ya que, de lo contrario, podríamos obtener una inmersión plana de  $G$  encerrando una inmersión plana de una componente de  $G$  en una cara cualquiera de una inmersión plana del resto del grafo.

Supongamos, por el absurdo, que  $G$  tuviese un vértice de corte  $v$  y sean  $G_1, \dots, G_k$  los  $\{v\}$ -lóbulos de  $G$ . Por la minimalidad de  $G$ , cada  $G_i$  es planar. Por el lema anterior, existe una inmersión plana de cada  $G_i$  en la cual  $v$  yace sobre la frontera de la cara exterior. Comprimimos cada inmersión para que quede comprendida en un ángulo menor a  $2\pi/k$  visto desde  $v$  y combinamos dichas inmersiones para obtener una inmersión plana de  $G$ . Esta contradicción muestra que  $G$  es 2-conexo. □

# Teorema de Kuratowski

## Lema

Sea  $S = \{x, y\}$  un conjunto separador de  $G$ . Si  $G$  es no planar, entonces agregando una arista  $xy$  a algún  $S$ -lóbulo de  $G$  se obtiene un grafo no planar.

## Demostración.

Sean  $G_1, \dots, G_k$  los  $S$ -lóbulos de  $G$  y sea  $H_i = G_i + xy$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

Supongamos, por el absurdo, que  $H_i$  es planar para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Entonces, por un lema anterior, cada  $H_i$  admite una inmersión plana donde  $xy$  yace sobre la frontera de la cara exterior. Para cada  $i \in \{2, \dots, k\}$ , esto permite unir  $H_i$  a una inmersión plana de  $H_1 \cup \dots \cup H_{i-1}$  en una cara que tiene  $xy$  en su frontera. Finalmente, borrando la arista  $xy$ , si no era parte de  $G$ , se obtiene una inmersión plana de  $G$ . Esta contradicción muestra que  $H_i$  debe ser no planar para algún  $i \in \{1, \dots, k\}$ . □

## Teorema de Kuratowski

A continuación mostraremos que un (hipotético) contraejemplo al Teorema de Kuratowski debe ser 3-conexo.

### Lema

Si  $G$  es un grafo con mínima cantidad de aristas entre todos los grafos no planares sin subgrafos de Kuratowski entonces  $G$  es 3-conexo.

### Demostración.

La remoción de una arista no puede crear un subgrafo de Kuratowski. Luego, por la minimalidad de  $G$ , removiendo una arista cualquiera de  $G$  se obtiene un grafo planar; es decir,  $G$  es minimalmente no planar. Por un lema anterior,  $G$  es 2-conexo. Supongamos que  $G$  tiene un conjunto separador  $S = \{x, y\}$ . Como  $G$  es no planar, por el lema anterior, algún  $S$ -lóbulo de  $G$  más una arista  $xy$  no es planar. Sea  $H$  dicho grafo. Como  $H$  tiene menos aristas que  $G$ , la minimalidad de  $G$  fuerza que  $H$  tenga un subgrafo  $F$  de Kuratowski. Todas las aristas de  $F$ , salvo quizá la arista  $xy$ , están contenidas en  $G$ . (...)

# Teorema de Kuratowski

## Demostración (cont.)

Como  $S$  es un conjunto separador minimal, ambos  $x$  e  $y$  tienen vecinos en cada componente de  $G - S$ . Por lo tanto podemos reemplazar  $xy$  con un  $x, y$ -camino en otro  $S$ -lóbulo para obtener un subgrafo de Kuratowski de  $G$ . Esta contradicción provino de suponer que  $G$  tenía un conjunto separador de tamaño 2. Como  $G$  es 2-conexo, concluimos que  $G$  es 3-conexo. □

## Inmersiones convexas

Para completar la demostración del Teorema de Kuratowski, alcanza con probar que los grafos 3-conexos sin subgrafos de Kuratowski son planares. Lo haremos por inducción. Para facilitar la prueba del paso inductivo resulta conveniente en realidad demostrar una afirmación más fuerte.

### Inmersión convexa

Una **inmersión convexa** de un grafo es una inmersión plana en la cual cada arista es un segmento y la frontera de cada cara es un polígono convexo.

Tutte (1960 y 1963) probó que todo grafo 3-conexo planar tiene una inmersión convexa. Este resultado es ajustado en términos de conectividad porque  $K_{2,n}$  no tiene una inmersión convexa para ningún  $n \geq 4$ .

Para probar el Teorema de Kuratowski, se adopta el enfoque de Thomassen (1980) que consiste en probar la afirmación más fuerte de Tutte para grafos 3-conexos sin subgrafos de Kuratowski.

## Inmersiones convexas

La demostración por inducción requiere encontrar un grafo más pequeño que sea 3-conexo y sin subgrafos de Kuratowski al que aplicarle la hipótesis inductiva.

### Lema (Thomassen, 1980)

Todo grafo 3-conexo  $G$  con al menos cinco vértices tiene una arista  $e$  tal que  $G \cdot e$  es 3-conexo.

### Demostración.

Consideremos una arista  $e$  con extremos  $x$  e  $y$ . Si  $G \cdot e$  no es 3-conexo entonces tiene un conjunto separador  $S$  de tamaño 2. Como  $G$  es 3-conexo,  $S$  debe incluir el vértice obtenido al contraer  $e$ . Sea  $z$  el otro vértice de  $S$  y llamémoslo **compañero** del par adyacente  $x, y$ . Por construcción,  $\{x, y, z\}$  es un conjunto separador de  $G$  de tamaño 3.

Supongamos, por el absurdo, que  $G$  no tiene ninguna arista cuya contracción resulta en un grafo 3-conexo. Luego, todo par de vértices adyacentes tiene un compañero. (...)

## Inmersiones convexas

### Demostración (cont.)

Entre todas las aristas de  $G$ , elegimos  $e = xy$  y un compañero  $z$  tal que el grafo disconexo  $G - \{x, y, z\}$  tenga una componente  $H$  con el mayor número posible de vértices. Sea  $H'$  otra componente de  $G - \{x, y, z\}$ . Como  $\{x, y, z\}$  es un conjunto separador mínimo, cada uno de  $x$ ,  $y$  y  $z$  tiene un vecino en cada uno de  $H$  y  $H'$ . Sea  $u$  el vecino de  $z$  en  $H'$  y sea  $v$  el compañero de  $u, z$ . En particular,  $G - \{z, u, v\}$  es disconexo. Por la elección de  $x, y$  y  $z$ ,  $G - \{z, u, v\}$  no puede tener una componente con más vértices que  $H$ .

Como el subgrafo  $J$  inducido por  $V(H) \cup \{x, y\}$  es conexo y  $\{z, u\} \cap V(J) = \emptyset$ ,  $v$  debe ser un vértice de corte de  $J$ . Como  $H$  es conexo y tanto  $x$  como  $y$  tienen vecinos en  $H$ ,  $v \notin \{x, y\}$ ; es decir,  $v \in V(H)$ . Luego, para algún  $w \in V(H - v)$ ,  $v$  debe pertenecer a todos los caminos en  $J$  que unen a  $w$  con  $x$  y aquellos que unen a  $w$  con  $y$ . Pero por construcción,  $\{v, z\}$  sería un  $u, w$ -separador en  $G$ , contradiciendo la 3-conexidad de  $G$ . Esta contradicción prueba que  $G \cdot e$  es 3-conexo para alguna arista  $e$  de  $G$ . □

## Inmersiones convexas

Vamos a mostrar que la contracción de aristas preserva la ausencia de subgrafos de Kuratowski. Llamaremos **vértices de ramificación** en una subdivisión  $H'$  de un grafo  $H$  a los vértices de grado al menos 3 en  $H'$ .

### Lema

Si un grafo  $G$  no contiene subgrafos de Kuratowski entonces  $G \cdot e$  tampoco los contiene.

### Demostración.

Equivalentemente, probaremos que si  $G \cdot e$  tiene un subgrafo  $H$  de Kuratowski entonces  $G$  también.

Sea  $z$  el vértice de  $G \cdot e$  obtenido por contracción de  $e = xy$ . Si  $z$  no está en  $H$  entonces el propio  $H$  es un subgrafo de Kuratowski en  $G$ . Si  $z \in V(H)$  pero  $z$  no es un vértice de ramificación entonces obtenemos un subgrafo de Kuratowski en  $G$  a partir de  $H$  reemplazando  $z$  con  $x$  o  $y$  o con la arista  $xy$ . (...)

# Inmersiones convexas

## Demostración (cont.)

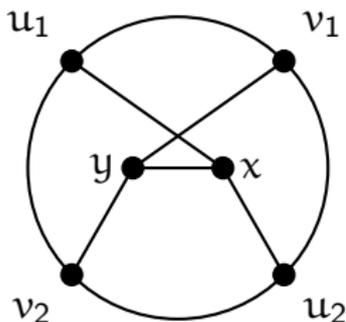
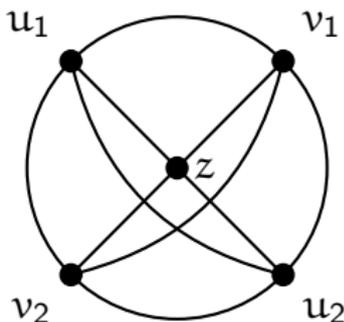
De forma similar, si  $z$  es un vértice de ramificación de  $H$  y a lo sumo una arista de  $H$  incidente en  $z$  es incidente en  $x$  en  $G$  entonces, reemplazando  $z$  por  $xy$  alarga el camino e  $y$  es el vértice de ramificación correspondiente para un subgrafo de Kuratowski en  $G$ .

Solo resta considerar el caso en que  $H$  es una subdivisión de  $K_5$  y  $z$  es un vértice de ramificación y las cuatro aristas incidentes en  $z$  consisten en dos aristas incidentes en  $x$  y dos incidentes en  $y$  en  $G$ . (...)

## Inmersiones convexas

### Demostración (cont.)

En este caso, sean  $u_1$  y  $u_2$  los vértices de ramificación que son los extremos opuestos de los caminos que dejan  $z$  en aristas incidentes en  $x$  y sean  $v_1$  y  $v_2$  vértices de ramificación que son los extremos opuestos de los caminos que dejan  $z$  en aristas incidentes a  $y$  en  $G$ .



Borrando el  $u_1, u_2$ -camino y el  $v_1, v_2$ -camino en  $H$ , obtenemos una subdivisión de  $K_{3,3}$  en  $G$ , en la cual  $y, u_1, u_2$  son los vértices de ramificación de un lado de la bipartición y  $x, v_1, v_2$  son los vértices de ramificación del otro lado de la bipartición. □

# Teorema de Kuratowski

## Teorema (Tutte, 1960 y 1963)

Si  $G$  es un grafo 3-conexo que no contiene subdivisiones de  $K_5$  ni de  $K_{3,3}$  entonces  $G$  tiene una inmersión convexa en el plano sin tres vértices colineales.

## Demostración (Thomassen, 1980 y 1981).

Por inducción en el número de vértices  $n$  de  $G$ .

Si  $n \leq 4$ , el único grafo 3-conexo con a lo sumo cuatro vértices es  $K_4$ , el cual tiene una inmersión convexa sin tres vértices colineales.

Sea  $n \geq 5$ . Sea  $e$  una arista tal que  $G \cdot e$  es 3-conexo, cuya existencia asegura un lema anterior. Sea  $z$  el vértice obtenido por la contracción de  $e$ . Por el lema anterior,  $G \cdot e$  no contiene subgrafos de Kuratowski. Por hipótesis inductiva,  $G \cdot e$  tiene una inmersión convexa  $H$  sin tres vértices alineados. (...)

# Inmersiones convexas

## Demostración (cont.)

En la inmersión  $H$ , el subgrafo que se obtiene borrando las aristas incidentes en  $z$  tiene una cara que contiene a  $z$  (que podría ser la cara exterior). Como  $H - z$  es 2-conexo, la frontera dicha cara es un ciclo (Ejercicio). Todos los vecinos de  $z$  se encuentran sobre el ciclo  $C$ . Los vecinos de  $z$  en  $G \cdot e$  son vecinos de  $x$  o  $y$  (o ambos) en  $G$ , donde  $x$  e  $y$  son los extremos de  $e$  en  $G$ .

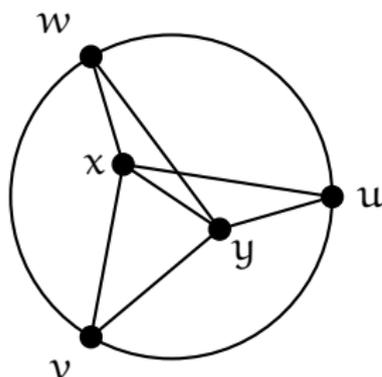
La inmersión convexa  $H$  incluye segmentos de recta de  $z$  a todos sus vecinos. Sean  $x_1, \dots, x_k$  los vecinos de  $x$  según su orden cíclico en  $C$ . Consideramos tres casos. (...)

# Inmersiones convexas

## Demostración (cont.)

- **Caso 1:**  $x$  e  $y$  comparten tres vecinos  $u, v, w$ .

En este caso, las aristas de  $C$  junto con la arista  $xy$  y las aristas entre  $\{x, y\}$  y  $\{u, v, w\}$  forman una subdivisión de  $K_5$ .



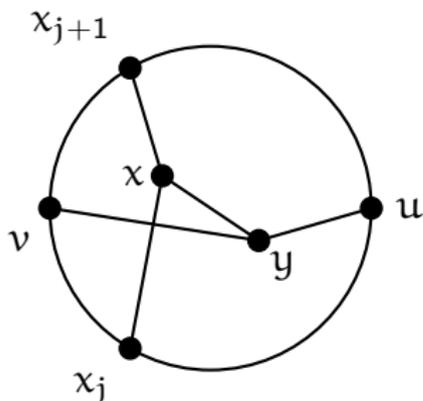
(...)

# Inmersiones convexas

## Demostración (cont.)

- **Caso 2:**  $y$  tiene dos vecinos  $u$  y  $v$  que alternan en  $C$  con los vecinos  $x_j$  y  $x_{j+1}$  de  $x$  para algún  $j$  (donde los subíndices son módulo  $k$ ).

En este caso, las aristas de  $C$  con los caminos  $uyv$ ,  $x_jxx_{j+1}$  y  $xy$  forman una subdivisión de  $K_{3,3}$ .



(...)

# Inmersiones convexas

## Demostración.

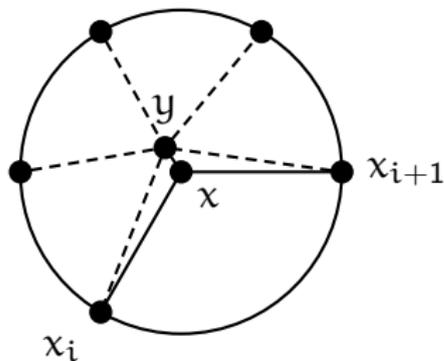
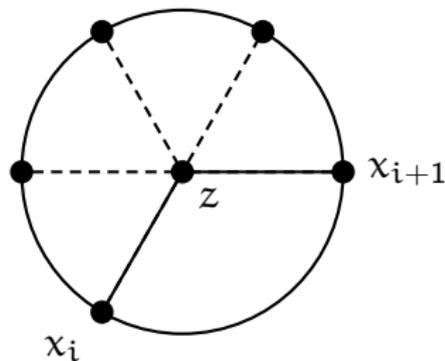
- ▶ **Caso 3:** *No se da ninguno de los dos casos anteriores.*

Afirmamos que en este caso todos los vecinos de  $y$  se encuentran en la porción de  $C$  entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$  (ambos posiblemente incluidos) para algún  $i$  (donde los subíndices son módulo  $k$ ). En efecto, como  $G$  es 3-conexo y  $x$  e  $y$  no tienen tres vecinos en común,  $y$  tiene algún vecino  $u$  que no es un vecino de  $x$ . Sea  $i$  tal que  $u$  se encuentra en la porción de  $C$  entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$ . Como por hipótesis  $y$  no tiene ningún vecino  $v$  tal que  $u$  y  $v$  ocurren alternadamente en  $C$  con  $x_i$  y  $x_{i+1}$  entonces la afirmación es cierta. (...)

# Inmersiones convexas

## Demostración (cont.)

Obtenemos una inmersión convexa de  $G$  reemplazando  $z$  por  $x$  y poniendo  $y$  en un punto cercano a  $z$  en la región encerrada por  $C$  y los segmentos de recta  $xx_i$  y  $xx_{i+1}$ .



El resultado se sigue por inducción.



# Coloreo de grafos planares

## Lema

Todo grafo planar tiene al menos un vértice de grado a lo sumo 5.

## Demostración.

Si todos los vértices de un grafo planar  $G$  tuviesen grado al menos 6 entonces tendríamos que  $2e \geq 6n$ . Pero esto contradiría la desigualdad  $e \leq 3n - 6$ . □

# Teorema de los cinco colores

## Teorema de los cinco colores (Heawood, 1890)

Cada grafo planar es 5-coloreable.

### Demostración.

Usamos inducción en  $n = |V(G)|$ . Si  $n \leq 5$  entonces  $G$  es trivialmente 5-coloreable.

Supongamos que  $n \geq 5$  y, por hipótesis inductiva, que todos los grafos planares con menos de  $n$  vértices son 5-coloreables. Sea  $G$  un grafo planar con  $n + 1$  vértices. Por el lema anterior,  $G$  contiene un vértice  $v$  de grado a lo sumo 5.

Por hipótesis inductiva, el grafo  $G - v$  es 5-coloreable.

Consideremos un 5-coloreo propio de  $G - v$  cualquiera. Si los vecinos de  $v$  no usaran los cinco colores entonces coloreando  $v$  con el color faltante obtendríamos un 5-coloreo de  $G$  y no habría más nada que probar. Por lo tanto solo hace falta considerar el caso en que  $d_G(v) = 5$  y los vecinos de  $v$  están coloreados con cinco colores distintos. (...)

## Teorema de los cinco colores

### Demostración (cont.)

Consideremos una representación plana fija de  $G$ . Permutando los colores de ser necesario, podemos asumir que los colores 1, 2, 3, 4 y 5 están dispuestos en sentido antihorario alrededor de  $v$ .

Llamamos  $v_i$  al vértice de color  $i$ .

Sea  $G_{i,j}$  el subgrafo de  $G - v$  inducido por los vértices de colores  $i$  y  $j$ . Intercambiando los colores  $i$  y  $j$  en cualquier componente de  $G_{i,j}$  nos da un nuevo 5-coloreo de  $G - v$ . Si la componente de  $G_{i,j}$  que contiene a  $v_i$  no contuviese a  $v_j$  entonces podríamos intercambiar los colores  $i$  y  $j$  en la componente de  $G_{i,j}$  que contiene a  $v_i$  para conseguir un nuevo 5-coloreo de  $G$  en el que  $v$  no tuviese ningún vecino de color  $i$  y  $G$  sería 5-coloreable.

Concluimos que  $G$  es 5-coloreable a menos que para cada elección de  $i$  y  $j$ , la componente de  $G_{i,j}$  que contiene a  $v_i$  también contiene a  $v_j$ .

(...)

# Teorema de los cinco colores

## Demostración (cont.)

Sea  $P_{i,j}$  un camino en  $G_{i,j}$  que une  $v_i$  con  $v_j$ . El ciclo que se cierra con  $P_{1,3}$  y el vértice  $v$  separa  $v_2$  de  $v_4$ . Como  $G$  es planar, el camino  $P_{2,4}$  tiene que cruzar dicho ciclo en algún punto de  $P_{1,3}$ . Pero los vértices de  $P_{1,3}$  tienen todos colores 1 y 3 y los de  $P_{2,4}$  todos colores 2 y 4. Esta contradicción prueba que  $G$  es 5-coloreable. □