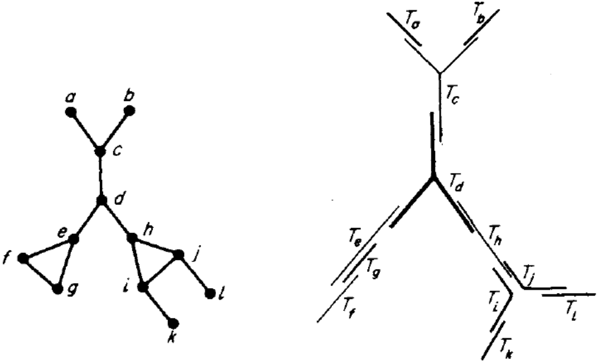
Grafos Intersección

Problemas de Grafos y Tratabilidad Computacional

Subárboles de un árbol y su grafo de intersección



Lema

Una familia de subárboles $\{T_i\}_{i\in I}$ de un árbol T cumple propiedad de Helly.

Demo: Primero vamos a probar lo siguientes: dados a, b y c 3 puntos de T y S el conjunto de subíndices s tal que T_s contiene al menos 2 de los puntos mencionados. Sean P^1, P^2 y P^3 los caminos simples de T que conecta a con b, b con c y c con a, respectivamente. Como T es árbol, entonces $P^1 \cap P^2 \cap P^3 \neq \emptyset$ y cada T_s $(s \in S)$ contiene alguno de los caminos P^i. Por lo tanto, $\bigcap_{s\in S} T_s \supseteq P^1 \cap P^2 \cap P^3 \neq \emptyset$.

Ahora probamos por inducción que cada subfamilia intersecante tiene intersección no vacía. Supongamos que es cierto para $|J| \leq k$ $[T_i \cap T_j \neq \emptyset \ \forall i, j \in J] \Rightarrow \bigcap_{j\in J} T_j \neq \emptyset$. Claramente para el caso base $k = 2$ es trivialmente cierto. Consideramos una subfamilia intersecante de $k+1$ subárboles $\{T_{i_1}, \cdots, T_{i_k}, T_{i_{k+1}}\}$. Por HI, existen 3 puntos a, b y c en T tal que $a \in \bigcap_{j=1}^{k} T_{i_j}$, $b \in \bigcap_{j=2}^{k+1} T_{i_j}$, $c = T_{i_1} \cap T_{i_{k+1}}$. Claramente, cada T_{i_j} contiene al menos 2 de los 3 puntos y por lo probado anteriormente, $\bigcap_{j=1}^{k+1} T_{i_j} \neq \emptyset$.

Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Probar las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. G es cordal.
2. G es grafo intersección de una familia de subárboles de un árbol.
3. Existe un árbol $T = (\mathcal{K}, \mathcal{E})$ donde su conjunto de vértices corresponde a los cliques de G tal que cada subgrafo inducido $T_{\mathcal{K}_v}$ $(v \in V)$ es conexo (por lo tanto un subárbol) donde $\mathcal{K}_v$ son los cliques que contiene al vértice v.

- (3) $\Rightarrow$ (2) Asumimos que $T = (\mathcal{K}, \mathcal{E})$ es el árbol que satisface (3). Sean $v, w \in V$. Claramente, $(v, w) \in E \Leftrightarrow$ existe un clique $K \in \mathcal{K}$ tal que $v, w \in K \Leftrightarrow \mathcal{K}_v \cap \mathcal{K}_w \neq \emptyset \Leftrightarrow$ $T_{\mathcal{K}_v} \cap T_{\mathcal{K}_w} \neq \emptyset$. Entonces G es grafo intersección de la familia de subárboles $\{T_{\mathcal{K}_v} / v \in V\}$.

- (2) $\Rightarrow$ (1) Sea $\{T_v\}$ $(v \in V)$ una familia de subárboles de un árbol T tal que $(v, w) \in E \Leftrightarrow T_v \cap T_w \neq \emptyset$. Supongamos que existe un C_k inducido con $k \geq 4$ $[v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}, v_0]$ que corresponde a la secuencia de subárboles $T_0, T_1, \cdots, T_{k-1}, T_0$ del árbol $T; T_i \cap T_j \neq \emptyset$ sii hay diferencia de a lo sumo 1 entre i y j módulo k. Elegir un punto a_i de $T_i \cap T_{i+1}$ para $0 \leq i \leq k-1$. Sea b_i el último punto en común entre los caminos simples en T de a_i hacia a_{i-1} y de a_i hacia a_{i+1}. Estos caminos están en T_i y T_{i+1}, respectivamente. También b_i está en $T_i \cap T_{i+1}$. Sea P^{i+1} el camino simple que conecta b_i con b_{i+1}. Claramente, $P^i \subseteq T_i$ y entonces $P^i \cap P^j = \emptyset$ si la diferencia entre i y j es mayor a 1 módulo k. Es más, $P^i \cap P^{i+1} = \{b_i\}$ para $0 \leq i \leq k-1$. Por lo tanto $\bigcup_i P_i$ es un ciclo simple en T, contradiciendo que T sea árbol.

- (1) $\Rightarrow$ (3) Por inducción en cantidad de vértices. Caso base, grafo trivial (un caso particular de los grafos completos, para estos grafos alcanza con un árbol de un solo vértice que representa el único clique del grafo). Supongamos que vale para grafos de menor talle. En caso que el grafo es no conexo y tiene k componentes conexas $G_1, \cdots, G_k$. Se puede aplicar HI para cada G_i y obtener T_i correspondiente que satisface (3). En este caso, simplemente hay conectar un punto de T_i con T_{i+1} para $1 \leq i \leq k-1$ y obtener un árbol que cumple (3) para todo el grafo G. Ahora consideramos G conexo y no completo. En tal caso, elegimos un vértice simplicial a. Claramente, $N[a]$ es un clique de G. Sean $U = \{u \in N[a] / N(u) \subset N[a]\}$ y $Y = N[a] \setminus U$. Se puede ver que U, Y y $V \setminus N[a]$ son conjuntos no vacíos. Sea $G' = G \setminus U$, el cual es cordal y de menor talle. Por HI, existe T' un árbol cuyo conjunto de vértices son cliques de G' y para cada vértice $v \in V \setminus U$, $K'_v = \{X \in K' / v \in X\}$ induce subgrafo conexo (subárbol) de T'.

Observación: K la collección de los cliques de G

$K = K' \cup \{N[a]\} \setminus \{Y\}$ o $K = K' \cup \{N[a]\}$ dependiendo si Y es clique o no de G'.

Sea B un clique de G' que contenga a Y.

Caso 1. Si $B = Y$, entonces obtenemos T desde T' renombrando B como $N[a]$.

Caso 2. Si $B \neq Y$, entonces obtenemos T desde T' conectando un vértice nuevo $N[a]$ a B.

En cualquier caso, $K_u = \{N[a]\}$ para todo $u \in U$ y $K_v = K'_v$ para todo $v \in V \setminus N[a]$, cada uno induce un subárbol de T.

Solamente falta ver K_y para todo $y \in Y$.

En caso 1, $K_y = K'_y \cup \{N[a]\} \setminus \{B\}$ el cual induce en T el mismo subárbol que induce K'_y en T' ya que se renombró solamente B como $N[a]$.

En caso 2, $K_y = K'_y \cup \{N[a]\}$. Sabemos que K'_y induce un subárbol en T', el subgrafo inducido por K_y tiene un clique más ($N[a]$) y el cual está conectado a $B \in K'_y$ y por tanto es conexo.

Teorema

Dado un grafo $G = (V, E)$, G es grafo split sii G es grafo intersección de una familia de subárboles de un árbol $K_{1,|V|}$.

- $\Rightarrow$) Sea $\{S, K\}$ una bipartición de V donde $S = \{v_1, \cdots, v_p\}$ es un conjunto independiente y $K = \{w_1, \cdots, w_q\}$ es un completo. Definimos ahora el árbol $K_{1,|V|}$ donde sus vértices son exactamente uno de grado $|V| = p + q$ que lo llamamos u y resto son de grado 1 que son mismos vértices de V. Para cada $v \in V$, vamos a definir un subárbol T_v de la siguiente manera. Si $v \in S$ entonces T_v tiene solamente el vértice v. De lo contrario T_v tiene a $\{u, v\} \cup N(v) \cap S$ como vértices. Es claro que todos estos subgrafos inducidos son subárboles y el grafo intersección de esta familia de subárboles es exactamente G.

- $\Leftarrow$) Sea u el vértice de grado exactamente $|V|$ de $K_{1,|V|}$. Podemos separa los $|V|$ subárboles en 2 grupos: (i) los que contienen a u (ii) los que no contienen a u. En el grafo intersección G, los vértices correspondientes a grupo (i) forma un completo y los que corresponden al grupo (ii) son subárboles que tienen exactamente un vértice de partición de $|V|$ vértices de grado 1 entonces forman un conjunto independiente. Por lo tanto el grafo de intersección $G = (V, E)$ de esta familia de subárboles es split.