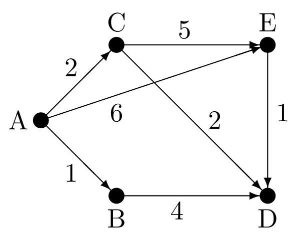
ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS III / TÉCNICAS DE DISEÑO DE ALGORITMOS
Final Libre / 17-FEB-2025

Completar los siguientes datos antes de entregar:

Apellido y nombre	L.U.	Cantidad de hojas[1]

Por favor desarrollar los ejercicios en hojas separadas y entregar esta hoja junto al examen. Cada hoja debe tener L.U., apellido y nombre.

1. Utilizar el algoritmo de Dijkstra en el siguiente grafo utilizando el vértice A como el origen.
   (a) Determinar en qué orden se recorren los vértices y cuál es la distancia para cada vértice con respecto a A.
   (b) Agregar un arco más al grafo con un peso negativo que haga fallar el algoritmo de Dijkstra. Justificar.



2. En la Carrera de Licenciatura de Cs. Datos, un grupo profesores han ofrecido temas de tesis para el próximo cuatrimestre. Cada profesor P_i está dispuesto a dirigir una cantidad limitada (c_i) de tesis en simultáneo. Por otro lado, cada alumno tiene su lista de temas interesados. Cabe destacar que la tesis es unipersonal en LCD. Modele el problema de cómo asignar los temas a los alumnos como un problema de flujo donde se quiere lograr maximizar la cantidad de asignaciones. En caso que se quiere priorizar a los alumnos con mejores promedios (un alumno puede no ser asignado si no hay forma de asignar a todos los alumnos con promedios mejores o iguales al alumno en cuestión), ¿cómo se podría adaptar el modelo para esta situación?

3. Sea $G = (V, X)$ un grafo conexo. La distancia $dist(v, w)$ entre un par de vértices $v, w \in V$ es la longitud del camino más corto que los une.
   - Dado un vértice $v \in V$, se define excentricidad de v como $E(v) = max_{w \in V} dist(v, w)$
   - El diámetro de G es $Diameter(G) = max_{v \in V} E(v)$
   - El radio de G es $Radius(G) = min_{v \in V} E(v)$. Se dice $v \in V$ es un centro de G si $E(v) = Radius(G)$

   (a) Probar $Radius(G) \leq Diameter(G) \leq 2 \cdot Radius(G)$.
   (b) Mostrar un grafo G de n vértices que no sea un grafo completo (K_n) ni exactamente un ciclo (C_n) donde $Diameter(G) = Radius(G)$.
   (c) Probar que todo árbol tiene a lo sumo 2 vértices centros.

[1] incluyendo a esta hoja

4. Dado un grafo $G = (V, X)$, su cintura $girth(G)$ es la longitud del ciclo más chico y en caso que G sea un bosque entonces $girth(G) = \infty$. Dar un algoritmo eficiente para calcular $girth(G)$ (la mejor complejidad conocida es $O(|V||X|)$. Mostrar la correctitud y determinar la complejidad del algoritmo propuesto.

5. Sea $G = (V, E)$ un grafo, un vertice $v \in V$ se dice punto de cortes si $G \setminus \{v\}$ tiene más componentes conexas que G y una arista $e \in E$ se dice puente si $G \setminus \{e\}$ tiene más componentes conexas que G. Decidir si es verdadero o falso cada una de las siguientes afirmaciones. Además probarla en el caso positivo y dar un contraejemplo en el caso negativo.

   (a) Si G es conexo y no tiene puentes, entonces G tiene exactamente un ciclo.

   (b) Si G es conexo y no tiene puntos de corte, entonces G no tiene puentes.

   (c) Si G es conexo y no tiene puentes, entonces G no tiene puntos de corte.

   (d) Si G es conexo y e una arista puente, entonces e está en todos los árboles generadores de G.

   (e) Si G es conexo con pesos en las arista, tiene menos de $|V|-1$ puentes y además existe una única arista e que tiene menor peso entre las aristas no puentes de G, entonces e está en todos los árboles generadores mínimos.

6. Sea S una secuencia de n números $s_1, \ldots, s_n$. La reversa o transpuesta de S, $S^T = s_n, \ldots, s_1$. Una subsecuencia de S se obtiene eliminando cero o más simbolos de S. Llamamos P una subsecuencia* de S cuando P es subsecuencia de S o de su inversa S^T. Resuelvan el problema de hallar la subsecuencia* común más larga entre 2 secuencias S y S' usando programación dinámica. Ejemplos:

   - con $S = [9, 5, 2, 8, 7, 3, 1, 6, 4]$ y $S' = [2, 9, 3, 5, 8, 7, 4, 1, 6]$ el resultado es $[9, 5, 8, 7, 1, 6]$
   - con $S = [9, 5, 2, 8, 7, 3, 1, 6, 4]$ y $S' = [6, 1, 4, 7, 8, 5, 3, 9, 2]$ el resultado también es $[9, 5, 8, 7, 1, 6]$

   Mostrar que el algoritmo propuesto es correcto y determinar su complejidad (temporal y espacial). Justificar.